Technische Universität Berlin


1. Übung zur Hochfrequenztechnik I
Harmonische Wellen auf Leitungen

Galina Georgieva

WiSe 2020/2021

Lernziele

Harmonische Wellen auf Leitungen:

1) Leitungslänge vs. Wellenlänge - was macht HF-Leitungen anders?
2) Beschreibung von Spannung und Strom als Wellen.
3) Wie wird eine HF-Leitung charakterisiert?
    - Leitungswellenwiderstand $\underline{Z}_L$
    - Ausbreitungskonstante $\underline{\gamma}$
4) Leitungsparameter und ihr Zusammenhang mit $\underline{Z}_L$ und $\underline{\gamma}$.

Motivation

- Zentrale Frage: Wie stehen Wellenlänge und Leitungslänge im Verhältnis zueinander?

- 1. Beispiel: Netzkabel zum Aufladen eines Notebooks.
  - Kabellänge $l = 1{,}5$ m,
  - Frequenz der Netzspannung 50 Hz ➔ Wellenlänge $\lambda = 6 \times 10^6$ m.
  - Offensichtlich: $\lambda \gg l$ ➔
    - Spannung/ Strom konstant entlang des Kabels.
    - Leitungslänge spielt keine Rolle.

Motivation

- Zentrale Frage: Wie stehen Wellenlänge und Leitungslänge im Verhältnis zueinander?

- 2. Beispiel: Koaxialkabel für Fernsehen.
  - Kabellänge $l = 150$ m.
  - Kanalfrequenz 120 MHz ➔ Wellenlänge $\lambda = 2{,}5$ m.
  - Dieses Mal $\lambda < l$ ➔
    - Spannung/ Strom ortsabhängig entlang des Kabels.
    - Spannung und Strom werden als ortsabhängige Wellen beschrieben.
    - Leitungslänge spielt eine Rolle, da Spannungs- und Stromwelle ortsabhängige Minima und Maxima haben.

Wellenbeschreibung von Spannung und Strom

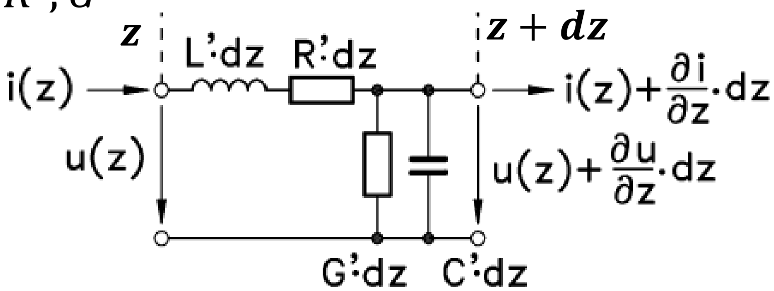
- **Wichtig**: bei hohen Frequenzen, Leitungslänge in Größenordnung der Wellenlänge

    ➔ Spannung und Strom zeit- **und** ortsabhängig: $u(z,t), i(z,t)$.

- Um Spannungs- und Stromwellen zu beschreiben

    ➔ Betrachtung eines Leitungsabschnitts der Länge dz.

- Leitung wird beschrieben mit den Belägen L', C', R', G'
    - L' - induktive Kopplung der Leiter,
    - C' - kapazitive Kopplung der Leiter,
    - R' - Ohm'sche Verluste durch die endliche Leitfähigkeit der Leiter,
    - G' - Dielektrische Verluste im Dielektrikum zwischen den Leitern, verursacht durch freie Ladungsträger.



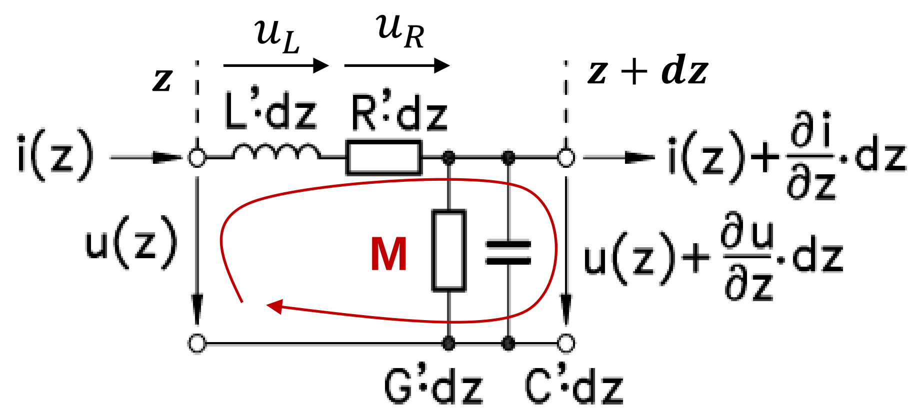
NB: Eine Leitung besteht aus zwei Leitern mit Dielektrikum dazwischen. Der Leistungstransport erfolgt im Dielektrikum zwischen den Leitern.

Wellenbeschreibung von Spannung und Strom

Technische Universität Berlin

Betrachtung der Masche M:

$$-u(z) + u_L + u_R + u(z) + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$$



$$u_L = \frac{\partial i}{\partial t} L' dz$$

$$u_R = i R' dz$$

Mit u_L, u_R eingesetzt in die Maschengleichung:

$$-\cancel{u(z)} + \frac{\partial i}{\partial t} L' \cancel{dz} + i R' \cancel{dz} + \cancel{u(z)} + \frac{\partial u}{\partial z} \cancel{dz} = 0$$

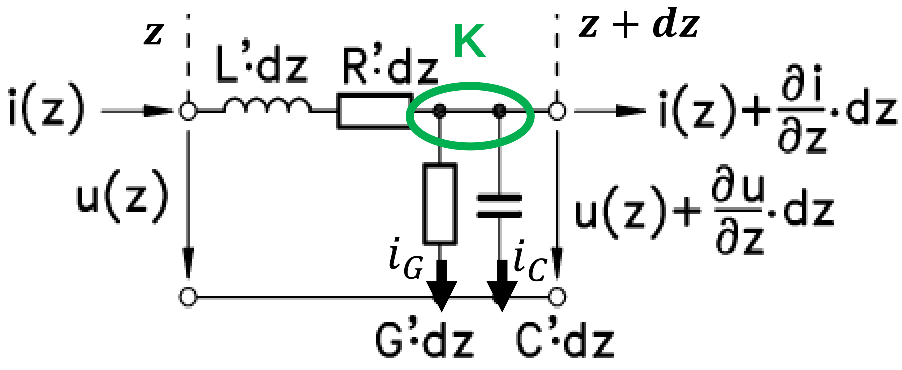
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial i}{\partial t} L' - i R' \quad \underset{\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = -(j\omega L' + R')\underline{I} \quad (1)$$

Wellenbeschreibung von Spannung und Strom

Technische Universität Berlin

Betrachtung des Knotens K:

$$-i(z) + i_G + i_C + i(z) + \frac{\partial i}{\partial z} dz = 0$$



$$i_C = \frac{\partial u}{\partial t} C' dz$$

$$i_G = uG'dz$$

Mit i_C, i_G eingesetzt in die Knotengleichung:

$$\cancel{-i(z)} + \frac{\partial u}{\partial t} C' \cancel{dz} + uG' \cancel{dz} + \cancel{i(z)} + \frac{\partial i}{\partial z} \cancel{dz} = 0$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial t} C' - uG' \quad \underset{\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = -(j\omega C' + G')\underline{U} \quad (2)$$

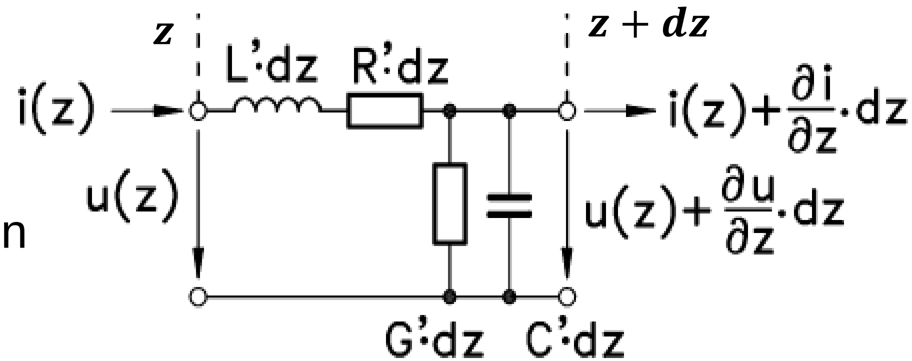
Wellenbeschreibung von Spannung und Strom

Zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = -(j\omega L' + R')\underline{I} \quad (1) \quad \cdot \Big| \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \underline{I}}{\partial z} = -(j\omega C' + G')\underline{U} \quad (2)$$

Einsetzen von (2)



Es resultiert die Helmholtzgleichung:

$$\frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U}, \qquad \underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')}$$

Mit der allgemeinen Lösung:

$$\underline{U}(z) = \underbrace{\underline{U}_1(z) e^{-\underline{\gamma} z}}_{\text{hinlaufende Welle}} + \underbrace{\underline{U}_2(z) e^{\underline{\gamma} z}}_{\text{rücklaufende Welle}} = \underline{U}_h(z) + \underline{U}_r(z), \qquad \underline{I}(z) = \frac{1}{\underline{Z}_L}\left(\underline{U}_h(z) - \underline{U}_r(z)\right)$$

Leitungswellenwiderstand $\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = \sqrt{\frac{(R' + j\omega L')}{(G' + j\omega C')}}$

Charakteristische Größen einer HF-Leitung

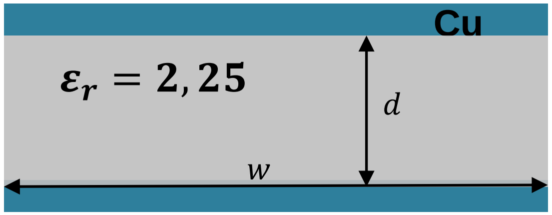
Eine HF-Leitung wird charakterisiert durch die Konstanten:

- Leitungslänge l,
- Leitungswellenwiderstand $\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{(R'+j\omega L')}{(G'+j\omega C')}}$,
- Ausbreitungskonstante $\underline{\gamma} = \sqrt{(R'+j\omega L')\cdot(G'+j\omega C')} = \alpha + j\beta$
  - α – Dämpfungskonstante
  - β – Phasenkonstante.
- Spezialfall: verlustarme Leitung, d.h. $R' \ll \omega L', G' \ll \omega C'$
  - $\underline{Z}_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$, $\alpha = \frac{R'}{2Z_L} + \frac{G' Z_L}{2}, \beta = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0}$.

Aufgaben

In allen Aufgaben gehen wir von einer verustarmen Leitung aus:

- $R' \ll \omega L', G' \ll \omega C'$
- $\underline{Z}_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}, \quad \alpha = \frac{R'}{2Z_L} + \frac{G' Z_L}{2}, \beta = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}$



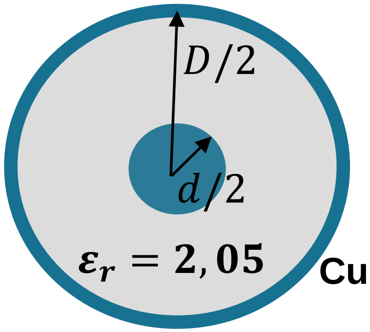
1. <u>Aufgabe</u> **(abgabepflichtig)**: Parallelplattenleitung
   - a) Dimensionieren Sie die gegebene Parallelplattenleitung, so dass der Leitungswellenwiderstand $50\ \Omega$ beträgt.
   - b) Nehmen Sie eine Betriebsfrequenz von $1\ \mathrm{GHz}$ an. Wie groß ist die Phasenkonstante β?
   - c) Geben Sie die Dämpfungskonstante α in Abhängigkeit von w oder d an. Die Platten bestehen aus Kupfer, die dielektrischen Verluste sind vernachlässigbar.

     Hinweis: Der Widerstandsbelag berechnet sich mit $R' = \frac{2}{\delta \kappa w}$, dabei ist δ die Skineindringstiefe, κ die Leitfähigkeit und w die Plattenbreite.
   - d) Wie groß sollen w und d sein, so dass die Dämpfung maximal 0.1 $^1/_{\mathrm{mm}}$ beträgt?

Aufgaben

In allen Aufgaben gehen wir von einer verustarmen Leitung aus:

- $R' \ll \omega L', G' \ll \omega C'$
- $\underline{Z}_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}, \ \alpha = \frac{R'}{2Z_L} + \frac{G' Z_L}{2}, \beta = \omega\sqrt{L'C'} = \ \omega\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}$



2. <u>Aufgabe</u> **(abgabepflichtig)**: Koaxialleitung
   a) Geben Sie formelmäßig die Beläge R', G', L', C' an.
   b) Dimensionieren Sie die gegebene Koaxialleitung, so dass der Leitungswellenwiderstand $75\ \Omega$ beträgt.
   c) Wählen Sie d, D so, dass die Dämpfung maximal 0.1 $^1/_\mathrm{m}$ beträgt. Die Betriebsfrequenz ist $1\ \mathrm{GHz}$. Die dielektrischen Verluste sind vernachlässigbar.
   Hinweis: Beachten Sie Kapitel LEI im Vorlesungsskript.