# 5. Übung zur Hochfrequenztechnik I
# Streuparameter (S-Parameter) und Streumatrix

Galina Georgieva

WiSe 2020/2021

# Lernziele

**Streumatrix und S-Parameter:**

1) Motivation – warum benutzen wir in der HF Technik gerade die S-Parameter?
2) Definition der S-Parameter.
3) Streumatrix und ihre Eigenschaften für verschiedene Netzwerke.
4) Bestimmung der Streumatrix einfacher Netzwerke.

# Motivation

Vergleich mit Z-, Y-, M-Parameter:

- Keine Messung von absoluten Größen (U, I) notwendig.

➔ Schwer, u.a. weil U, I abhängig vom Ort und von der Wellenlänge.

- Die Messung dieser Parameter erfordert Kurzschluss und/oder Leerlauf

➔ Sehr starke Rückreflexion, aktive Bauelemente können zerstört werden.

S-Parameter:

- Messung von relativen Größen – welcher Leistungsanteil wird an einem Port reflektiert oder zu einem anderen Port übertragen.
- Die Messung erfordert Anpassung – bei allen Wellenlängen liegt keine Reflexion vor.

# Netzwerkbeschreibung

Einführung normierter Wellenamplituden:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h(z) + \underline{U}_r(z), \qquad \underline{I}(z) = \frac{1}{\underline{Z}_L}\left(\underline{U}_h(z) - \underline{U}_r(z)\right)$$

Sei $\underline{Z}_L = Z_L$ reell,

$$P(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\underline{U}(z)\cdot\underline{I}^*(z)\} = \frac{1}{2Z_L}\mathrm{Re}\left\{|\underline{U}_h(z)|^2 - |\underline{U}_r(z)|^2 + 2j\mathrm{Im}\{\underline{U}_r\cdot\underline{U}_h{}^*\}\right\}$$

$$P(z) = \underbrace{\frac{|\underline{U}_h(z)|^2}{2Z_L}}_{\substack{\text{hinlaufender}\\ \text{Leistungsanteil}}} - \underbrace{\frac{|\underline{U}_r(z)|^2}{2Z_L}}_{\substack{\text{rücklaufender}\\ \text{Leistungsanteil}}} = \frac{1}{2}\left[\left|\underbrace{\frac{\underline{U}_h(z)}{\sqrt{Z_L}}}_{=:\,\underline{a}(z)}\right|^2 - \left|\underbrace{\frac{\underline{U}_r(z)}{\sqrt{Z_L}}}_{=:\,\underline{b}(z)}\right|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left|\underline{a}(z)\right|^2 - \left|\underline{b}(z)\right|^2\right]$$

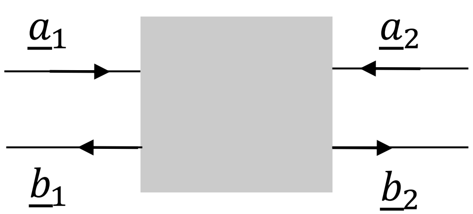
Wir führen leistungsnormierte Amplituden $\underline{a}(z)$, $\underline{b}(z)$ ein, deren Betragsquadrat einem Leistungsanteil entspricht (hin- oder rücklaufend). Die Einheit der Amplituden selbst ist $\sqrt{\mathrm{W}}$.

Mit diesen Amplituden lässt sich der Reflexionsfaktor ausdrücken als:

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{U}_r(z)}{\underline{U}_h(z)} = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)}$$

# Streumatrix eines Zweitors

- Um die Parameter der Streumatrix zu definieren, gehen wir zunächst von einem Zweitor aus.
- Das Konzept lässt sich auf ein N-Tor erweitern.




S-Matrix

$$\begin{bmatrix}\underline{b}_1\\ \underline{b}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{S}_{11} & \underline{S}_{12}\\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22}\end{bmatrix}}_{\underline{S}} \cdot \begin{bmatrix}\underline{a}_1\\ \underline{a}_2\end{bmatrix}$$

Leistungsnormierte hin- und rücklaufende Amplituden lassen sich mit der Streumatrix (S-Matrix) verknüpfen.

<u>Definitionen:</u>

$$\underline{S}_{11} = \left.\frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0} \qquad \underline{S}_{22} = \left.\frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_2}\right|_{\underline{a}_1=0}$$

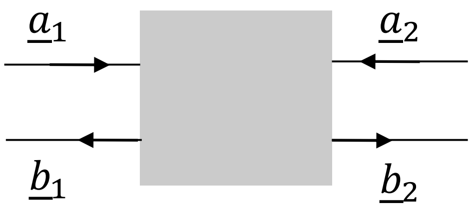
Reflexion am Port 1 und Port 2

$$\underline{S}_{21} = \left.\frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0} \qquad \underline{S}_{12} = \left.\frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_2}\right|_{\underline{a}_1=0} \rightarrow \underline{S}_{mn} = \left.\frac{\underline{b}_m}{\underline{a}_n}\right|_{\underline{a}_{m\neq n}=0}$$

Transmission vom Port 1 zum Port 2

Transmission vom Port 2 zum Port 1

# Eigenschaften von Netzwerken




$$\begin{bmatrix}\underline{b}_1\\\underline{b}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{S}_{11} & \underline{S}_{12}\\\underline{S}_{21} & \underline{S}_{22}\end{bmatrix}}_{\underline{S}} \cdot \begin{bmatrix}\underline{a}_1\\\underline{a}_2\end{bmatrix}$$

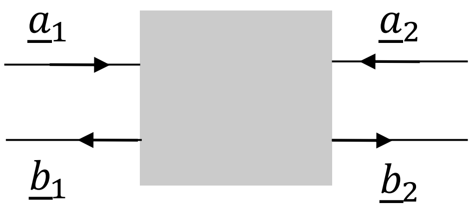
S-Matrix Eigenschaften verschiedener Netzwerke:

- Symmetrische Netzwerke: $\underline{S}_{ii} = \underline{S}_{jj}$
- Reziproke Netzwerke: $\underline{S}_{ij} = \underline{S}_{ji}$
- Verlustfreie Netzwerke: $\underline{S} \cdot \underline{S}^{*T} = I$ mit $I$ die Einheitsmatrix

Wann liegt welche Situation vor?

- Symmetrie – die Koppelstellen in einem Netzwerk sind identisch, die Leitungsimpedanzen verschiedener Verzweigungen sind gleich.
- Reziprozität – Ausbreitung in Leitungen nicht  abhängig von der Ausbreitungsrichtung. Im System liegt kein Material mit Tensor vor.
- Verlustfreiheit
  - Im Netzwerk liegen keine resistiven Bauelemente vor.
  - Die Leitungen haben vernachlässigbare Dämpfung oder die Leitungslänge ist vernachlässigbar.

# Eigenschaften von Netzwerken




$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix}}_{\underline{S}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}$$

S-Matrix Eigenschaften verschiedener Netzwerke:

- Symmetrische Netzwerke: $\underline{S}_{ii} = \underline{S}_{jj}$
- Reziproke Netzwerke: $\underline{S}_{ij} = \underline{S}_{ji}$
- Verlustfreie Netzwerke: $\underline{S} \cdot \underline{S}^{*T} = I$ mit $I$ die Einheitsmatrix

Beispiele:

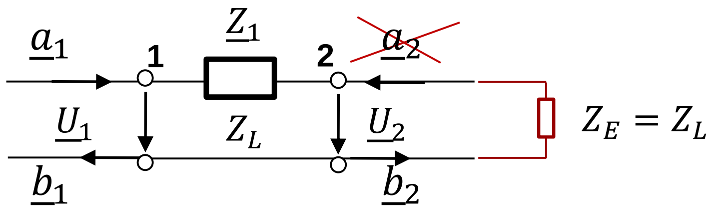
- Reziprokes aber nicht symmetrisches System.

Ein Koaxialkabel hat zwei Stecker an jedem Eingang. Der eine Stecker ist defekt, so dass dort starke Reflexion auftritt. Der andere Stecker hingegen koppelt reflexionsfrei. Das gesamte System ist somit nicht symmetrisch, da die Reflexionseigenschaften an beiden Enden unterschiedlich sind. Die Übertragungseigenschaften sind davon nicht betroffen, das System ist damit reziprok.

- Symmetrisches aber nicht reziprokes System.

Ein Zirkulator wird durch ein Tensor-Material realisiert, so dass eine Übertragung bspw. von Port 1 nach Port 2 möglich ist, aber umgekehrt nicht. Das Bauelement ist damit nicht reziprok. Wenn die Koppelstellen an jedem Port gleiches Verhalten haben, handelt es sich um ein symmetrisches Bauelement.

# Aufgaben-Beispiele




$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}$$

<u>1. Beispiel</u>: Leitung mit Serienimpedanz. Die Leitungsmaterialien sind verlustlos und linear, die Leitungslänge ist vernachlässigbar.

<u>Lösung:</u> Wir fangen mit den Netzwerkeigenschaften an.

- Aufgrund der identischen Eingänge liegt *Symmetrie* vor. Die Materialeigenschaften deuten auf *Reziprozität*. Wir suchen zwei Parameter, denn es gilt:

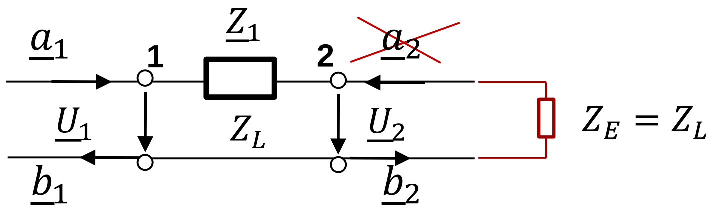
$$\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}, \qquad \underline{S}_{21} = \underline{S}_{12}$$

- Die Leitung selbst ist aufgrund ihrer Länge verlustfrei, aber die Serienimpedanz kann resistiv sein. Wir können *Verluste* nicht ausschließen.

Vorgehensweise für die Bestimmung von $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}$.

- Unabhängig davon, ob wir Verluste haben oder nicht, ist die Bestimmung von $\underline{S}_{11}$ gleich.
- Nach Definition ist $\underline{S}_{11} = \left.\frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0}$. Hier $\underline{a}_2 = 0$ bedeutet einen reflexionsfreien Abschluss am Port 2.
- Die Gesamtimpedanz der Reihenschaltung ist damit $\underline{Z}_G = Z_L + \underline{Z}_1$.
- Der entsprechende Reflexionsfaktor ist

$$\underline{S}_{11} = \frac{\underline{Z}_G - Z_L}{\underline{Z}_G + Z_L} = \frac{Z_L + \underline{Z}_1 - Z_L}{Z_L + \underline{Z}_1 + Z_L} = \frac{\underline{Z}_1}{2Z_L + \underline{Z}_1}$$




$$\begin{bmatrix}\underline{b}_1\\ \underline{b}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{S}_{11} & \underline{S}_{12}\\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\underline{a}_1\\ \underline{a}_2\end{bmatrix}$$

<u>1. Beispiel</u>: Leitung mit Serienimpedanz. Die Leitungsmaterialien sind verlustlos und linear, die Leitungslänge ist vernachlässigbar.

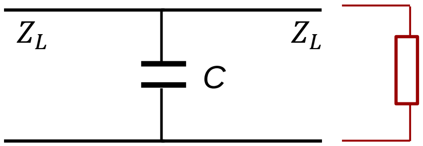
<u>Lösung:</u> Vorgehensweise für die Bestimmung von $\underline{S}_{21} = \underline{S}_{12}$.

- Im verlustfreien Fall kann man die Matrixeigenschaften nutzen. Aufgrund der potentiellen Verluste müssen wir in diesem Fall von der Definition von $\underline{S}_{21}$ ausgehen.
- Nach Definition ist $\underline{S}_{21} = \left.\frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0}$. Wir behalten weiterhin den reflexionsfreien Abschluss am Port 2.
- Wegen $\underline{a}_2 = 0$ ist die Amplitude an diesem Port $\underline{U}_2 = \underline{U}_{h2} \sim \underline{b}_2$ .
- Am Port 1 ist wie üblich $\underline{U}_1 = \underline{U}_{h1} + \underline{U}_{r1}$, wobei $\underline{U}_{h1} \sim \underline{a}_1$.
- Weiterhin gilt durch den Spannungsteiler
$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_L + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_L}$$
- Einsetzen in die Definition:

$$\underline{S}_{21} = \left.\frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0} = \frac{\underline{U}_{h2}}{\underline{U}_{h1}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_{h1}} = \frac{\underline{U}_2\underline{U}_1}{\underline{U}_{h1}\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \cdot \frac{\underline{U}_{h1} + \underline{U}_{r1}}{\underline{U}_{h1}} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_1}\left(1 + \underline{S}_{11}\right) = \frac{2\underline{Z}_L}{2\underline{Z}_L + \underline{Z}_1}$$

Anm.: Da wir von Port 1 anregen und Port 2 reflexionsfrei abschließen, wird als hinlaufend die Welle bezeichnet, die in Richtung vom Port 1 nach Port 2 propagiert.

# Aufgaben-Beispiele




$$Z_E = Z_L = \frac{1}{Y_L}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}$$

<u>2. Beispiel</u>: Leitung mit Parallelkapazität. Die Leitungsmaterialien sind verlustlos und linear, die Leitungslänge ist vernachlässigbar.

<u>Lösung:</u> Wir fangen mit den Netzwerkeigenschaften an.

- Aufgrund der identischen Eingänge liegt *Symmetrie* vor. Die Materialeigenschaften deuten auf *Reziprozität*. Wir suchen zwei Parameter, denn es gilt:

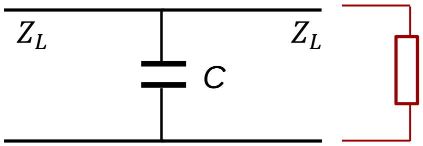
$$\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}, \qquad \underline{S}_{21} = \underline{S}_{12}$$

- Die Leitung selbst ist aufgrund ihrer Länge verlustfrei, es liegen keine Widerstände vor ➔ verlustfreier Fall: $\underline{S} \cdot \underline{S}^{*T} = I$
- Daraus folgt: $|\underline{S}_{11}|^2 + |\underline{S}_{21}|^2 = 1$

Bestimmung von $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}$.

- Nach Definition ist $\underline{S}_{11} = \left.\frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0}$. Hier $\underline{a}_2 = 0$ bedeutet einen reflexionsfreien Abschluss am Port 2.
- Wegen der Parallelschaltung rechnen wir mit der Admittanz $\underline{Y}_G = Y_L + \underline{Y}_C = Y_L + j\omega C$.
- Der entsprechende Reflexionsfaktor ist

$$\underline{S}_{11} = \frac{Y_L - \underline{Y}_G}{Y_L + \underline{Y}_G} = \frac{Y_L - Y_L - j\omega C}{Y_L + Y_L + j\omega C} = \frac{-j\omega C}{2Y_L + j\omega C} \rightarrow |\underline{S}_{11}| = \frac{1}{\sqrt{4m^2 + 1}} \text{ mit } m = \frac{Y_L}{\omega C}$$




$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L = \frac{1}{\underline{Y}_L}$$

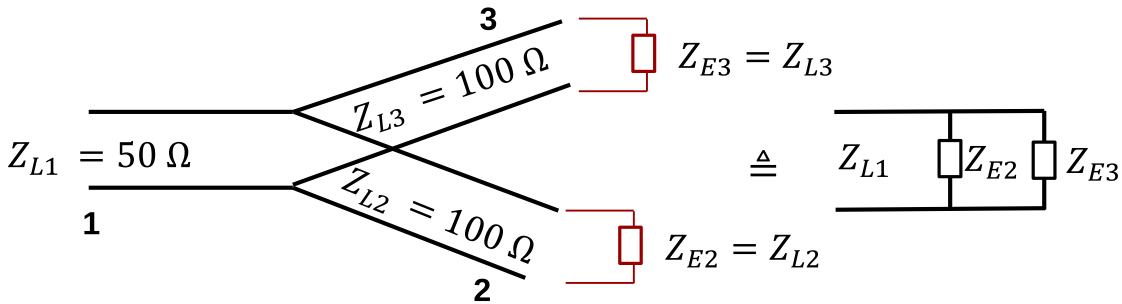
$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}$$

<u>2. Beispiel</u>: Leitung mit Parallelkapazität. Die Leitungsmaterialien sind verlustlos und linear, die Leitungslänge ist vernachlässigbar.

<u>Lösung:</u> Bestimmung von $\underline{S}_{21} = \underline{S}_{12}$.

Mit $|\underline{S}_{11}|^2 + |\underline{S}_{21}|^2 = 1$ folgt $|\underline{S}_{21}| = \sqrt{1 - |\underline{S}_{11}|^2}$

$$|\underline{S}_{11}| = \frac{1}{\sqrt{4m^2+1}} \text{ mit } m = \frac{Y_L}{\omega C} \rightarrow |\underline{S}_{21}| = \sqrt{1 - \frac{1}{4m^2+1}} = \frac{2m}{\sqrt{4m^2+1}}$$




$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{13} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} & \underline{S}_{23} \\ \underline{S}_{31} & \underline{S}_{32} & \underline{S}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 \end{bmatrix}$$

<u>3. Beispiel</u>: Verlustloses Dreitor mit vernachlässigbaren elektrischen Längen.

<u>Lösung:</u> Wir fangen mit den Netzwerkeigenschaften an.

- Tor 2 und 3 sind identisch $\underline{S}_{22} = \underline{S}_{33}$
- Wegen der gegebenen Leitungsimpedanzen gilt

$$\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21} = \underline{S}_{13} = \underline{S}_{31} \quad \text{und} \quad \underline{S}_{23} = \underline{S}_{32}$$

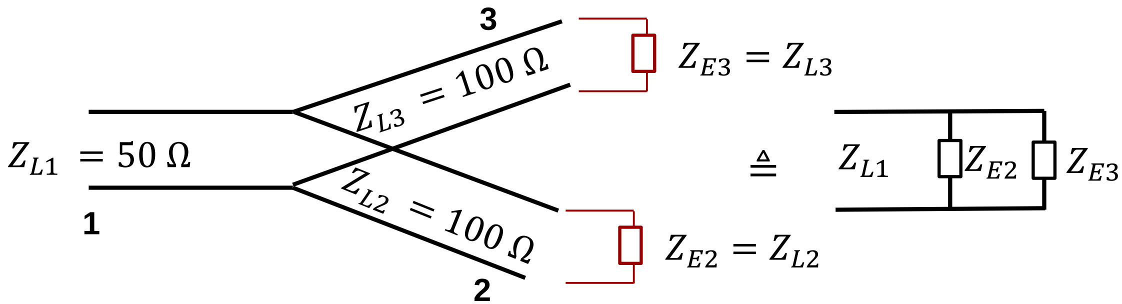
- Die Anordnung ist verlustlos $\underline{S} \cdot \underline{S}^{*T} = I$

Bestimmung der Reflexionsfaktoren:

$$\underline{S}_{11} = \left.\frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_{2,3}=0} = \frac{Z_{E2}\,||\,Z_{E3} - Z_{L1}}{Z_{E2}\,||\,Z_{E3} + Z_{L1}} = \frac{100\,||100 - 50}{100\,||100 + 50} = 0$$

Analog

$$\underline{S}_{33} = \underline{S}_{22} = \left.\frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_2}\right|_{\underline{a}_{1,3}=0} = \frac{Z_{E1}\,||\,Z_{E3} - Z_{L2}}{Z_{E1}\,||\,Z_{E3} + Z_{L2}} = \frac{50\,||100 - 100}{50\,||100 + 100} = -\frac{1}{2}$$




$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{13} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} & \underline{S}_{23} \\ \underline{S}_{31} & \underline{S}_{32} & \underline{S}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 \end{bmatrix}$$

<u>3. Beispiel</u>: Verlustloses Dreitor mit vernachlässigbaren elektrischen Längen.

<u>Lösung:</u> Bestimmung der Transmissionsfaktoren:

$$\underline{S} \cdot \underline{S}^{*T} = I \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{12} & -{}^{1}\!/_{2} & \underline{S}_{23} \\ \underline{S}_{12} & \underline{S}_{23} & -{}^{1}\!/_{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{12} & -{}^{1}\!/_{2} & \underline{S}_{23} \\ \underline{S}_{12} & \underline{S}_{23} & -{}^{1}\!/_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{S}_{12}|^2 + |\underline{S}_{12}|^2 = 1 \rightarrow |\underline{S}_{12}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

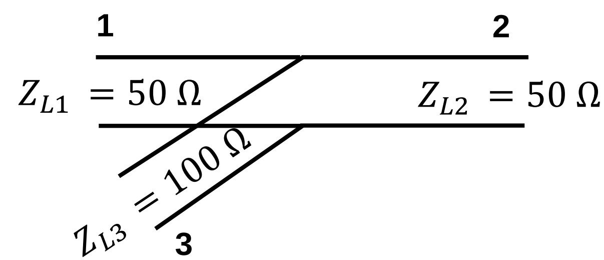
$$|\underline{S}_{12}|^2 + \frac{1}{4} + |\underline{S}_{23}|^2 = 1 \rightarrow |\underline{S}_{23}| = \frac{1}{2}$$

# Aufgaben (**abgabepflichtig**)

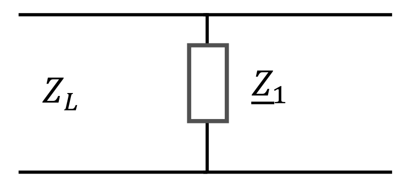
In allen Aufgaben gehen wir von verlustfreien, linearen Materialien aus. Die Leitungslängen sind vernachlässigbar.

Ausreichend sind die Beträge der S-Parameter.

1. Aufgabe: S-Parameter eines Dreitors.




2. Aufgabe: S-Parameter einer Leitung mit Parallelimpedanz.




3. Aufgabe: S-Parameter einer Leitung mit Reiheninduktivität.