7. Übung zur Hochfrequenztechnik I
Rechteckhohlleiter

Galina Georgieva

WiSe 2020/2021

Lernziele

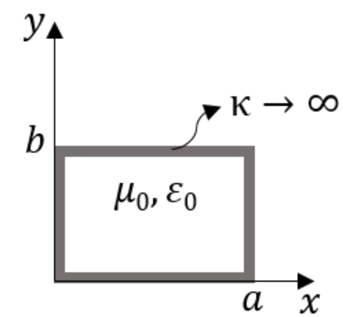
Rechteckhohlleiter:

1) Wellenbeschreibung in Rechteckhohlleitern.
2) Vektorpotential und Lösungsansätze für H-Wellen (TE-Wellen).
3) Cutoff-Frequenz, Einmodigkeit.
4) Dimensionierung von Rechteckhohlleitern für Einmodenbetrieb.

H-Wellen in Rechteckhohlleitern

Wir betrachten H-Wellen (TE-Wellen) in einem Rechteckhohlleiter mit Dimensionen wie in der Abbildung gegeben.

- H-Wellen sind Wellen ohne E-Feld Komponente in Ausbreitungsrichtung (hier z-Richtung).
- Für ihre Beschreibung haben wir zwei Wege:
  1) Direkte Bestimmung der insg. 5 Feldkomponenten ($\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{H}_x, \underline{H}_y, \underline{H}_z$) über die Maxwell'schen Gleichungen ➔ aufwendig.
  2) Einführung einer Hilfsgröße – das Vektorpotential, das nur eine Komponente hat.



- Vektorpotential für H-Wellen

$$-\mathrm{rot}\,\vec{\underline{F}} = \vec{\underline{E}} \;\; \mathrm{mit}\; \vec{\underline{F}} = \Psi_H \vec{e}_z$$

Das Vektorpotential ist verknüpft mit der Größe, die keine Komponente in Ausbreitungsrichtung hat (hier das E-Feld). Das Vektorpotential selbst hat nur eine Komponente in Ausbreitungsrichtung.

Wie lautet das Vektorpotential für eine E-Welle?

- Das Vektorpotential erfüllt die Helmholtz-Gleichung ➔ Wir suchen die Lösung für nur *eine* Ersatzgröße mit *einer* Feldkomponente und leiten daraus die Lösung für die 5 E- und H-Feldkomponenten ab.

$$\Delta\vec{\underline{F}} + k^2\vec{\underline{F}} = 0, \qquad k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c_0}$$

Hier ist k die Ausbreitungskonstante bei einer Kreisfrequenz ω.

H-Wellen in Rechteckhohlleitern

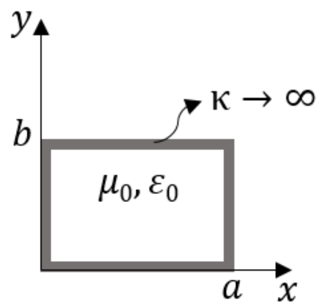
$$\Delta\underline{\vec{F}} + k^2\underline{\vec{F}} = 0, \qquad k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

Die Helmholtz-Gl. lässt sich mit dem Separationsansatz lösen. D.h. die Lösung ist ein Produkt dreier Funktionen und jede hängt von nur einer Raumkoordinate ab.

$$\Psi_H = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z), \text{wobei } Z(z) = \underline{a}_{mn}e^{\mp j\beta_{mn}z} \text{ bekannt.}$$

Die Lösung in Ausbreitungsrichtung ist bekannt – es beschreibt eine oszillierende und hin- oder zurückpropagierende Welle (entspricht einer Exponentialfunktion mit komplexem Term).

Einsetzen des Separationsansatzes in die Helmholtz-Gl.



$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}YZ + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}Z - \beta_{mn}^2 XYZ + k^2 XYZ = 0$$

Division durch XYZ:

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{=k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}_{=k_y^2} - \beta_{mn}^2 + k^2 = 0$$

Die Summe auf der linken Seite muss eine Konstante ergeben ➔ Jeder Term muss eine Konstante sein.

Es stellt sich heraus, dass die Funktionen X, Y auch eine Lösung der Helmholtz-Gl. ➔ Es handelt sich um oszillierende, aber nicht propagierende Wellenfunktionen, d.h. mit sin() oder cos() Abhängigkeit.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = k_x^2 X \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k_y^2 Y$$

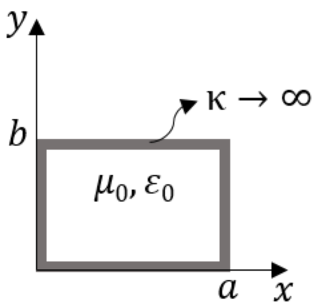
H-Wellen in Rechteckhohlleitern

Aus der Gleichung:

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{=k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}_{=k_y^2} - \beta_{mn}^2 + k^2 = 0$$

lassen sich folgende wichtige Größen und Relationen ableiten:

<u>Ausbreitungskonstante und Dispersionsrelation:</u>



$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

<u>Ausbreitungsbedingung</u>: β_{mn} reell ➔

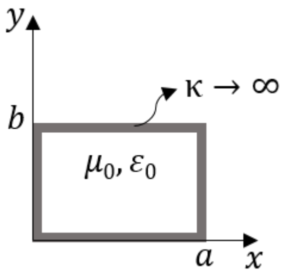
$$k^2 > k_x^2 + k_y^2$$

<u>Cut-off Frequenz:</u> infolge der Ausbreitungsbedingung sind nur Wellen oberhalb einer bestimmten Frequenz ausbreitungsfähig.

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{\omega_c}{c_0}\right)^2 \to \omega_c = c_0\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$f_c = \frac{c_0}{2\pi}\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

H-Wellen in Rechteckhohlleitern



$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{=k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}_{=k_y^2} - \beta_{mn}^2 + k^2 = 0$$

X, Y sind entweder sin() oder cos(). Eine allgemeine Lösung für das Vektorpotential ist:

$$\underline{\vec{F}} = \Psi_H \vec{e}_z, \qquad \Psi_H = \begin{Bmatrix} \sin(k_x x) \\ \cos(k_x x) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin(k_y y) \\ \cos(k_y y) \end{Bmatrix} \cdot \underline{a}_{mn} e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

Das zugehörige E-Feld berechnet sich mit:

$$-\mathrm{rot}\,\underline{\vec{F}} = -\vec{e}_z \times \nabla\Psi_H = \underline{\vec{E}} \rightarrow \underline{E}_x = -\frac{\partial \Psi_H}{\partial y}, \qquad \underline{E}_y = \frac{\partial \Psi_H}{\partial x}$$

$$\underline{E}_x = -k_y \begin{Bmatrix} \sin(k_x x) \\ \cos(k_x x) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(k_y y) \\ -\sin(k_y y) \end{Bmatrix} \cdot \underline{a}_{mn} e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

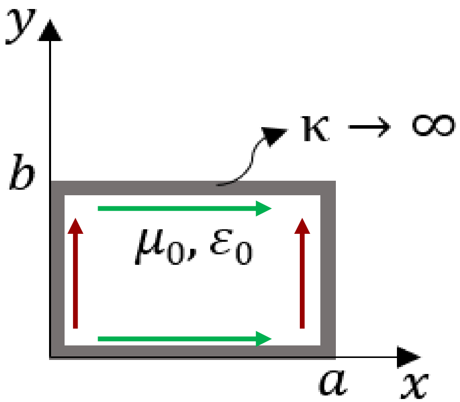
$$\underline{E}_y = k_x \begin{Bmatrix} \cos(k_x x) \\ -\sin(k_x x) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin(k_y y) \\ \cos(k_y y) \end{Bmatrix} \cdot \underline{a}_{mn} e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

Die genaue Bestimmung von X, Y hängt von der gegebenen Geometrie und Koordinatensystem ab. X, Y resultieren immer aus der Randbedingung an einem perfekt leitenden Metall: $E_{tan} = 0$.(Das tangentiale E-Feld verschwindet).

H-Wellen in Rechteckhohlleitern

Technische Universität Berlin

Anwendung der Randbedingungen:



$$\underline{\vec{F}} = \Psi_H \vec{e}_z, \qquad \Psi_H = \begin{Bmatrix} \cancel{\sin(k_x x)} \\ \cos(k_x x) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cancel{\sin(k_y y)} \\ \cos(k_y y) \end{Bmatrix} \cdot \underline{a}_{mn} e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

$$\underline{E}_x = -k_y \begin{Bmatrix} \cancel{\sin(k_x x)} \\ \cos(k_x x) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cancel{\cos(k_y y)} \\ -\sin(k_y y) \end{Bmatrix} \cdot \underline{a}_{mn} e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

$$\underline{E}_y = k_x \begin{Bmatrix} \cancel{\cos(k_x x)} \\ -\sin(k_x x) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cancel{\sin(k_y y)} \\ \cos(k_y y) \end{Bmatrix} \cdot \underline{a}_{mn} e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

$\underline{E}_x(y = 0, b) = 0 \rightarrow \sin(k_y y)$ ist eine Lösung. Nullstelle bei b bedeutet

$$\sin(k_y b) = 0 \leftrightarrow k_y b = n\pi, k_y = \frac{n\pi}{b}, n \text{ ganzzahlig.}$$

$\underline{E}_y(x = 0, a) = 0 \rightarrow \sin(k_x x)$ ist eine Lösung. Nullstelle bei a bedeutet

$$\sin(k_x a) = 0 \leftrightarrow k_x a = m\pi, k_x = \frac{m\pi}{a}, m \text{ ganzzahlig.}$$

Damit ergibt sich:

$$\Psi_H = \underline{a}_{mn} \cos(k_x x) \cos(k_y y)\, e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

$$\underline{E}_x = k_y \cos(k_x x) \sin(k_y y)\, e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

$$\underline{E}_y = -k_x \sin(k_x x) \cos(k_y y)\, e^{\mp j\beta_{mn} z}$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, k = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad f_c = \frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

H-Wellen in Rechteckhohlleitern

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c_0} \qquad \beta_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad f_c = \frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Grundmode – welche Mode hat die kleinste Cutoff-Frequenz.

Hier $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b} \rightarrow m = 1, n = 0$ ergibt die Grundmode H_{10} mit $f_c = \frac{c_0}{2a}$

Maximaler Einwelligkeitsbereich: die Cutoff-Frequenz von H_{01} muss mindestens so groß sein, wie die Cutoff-Frequenz von H_{20} .

$$f_{c,H01} \geq f_{c,H20} \rightarrow a \geq 2b$$

Beispiel: Ein Rechteckhohlleiter muss im Wellenlängenbereich $10\text{ GHz} - 15\text{ GHz}$ einmodig sein. Gesucht werden mögliche Seitendimensionen.

Eine mögliche Cutoff-Frequenz ist z.B. $f_{c,H10} = 7{,}6\text{ GHz} < 10\text{ GHz}$,

Zudem gilt $f_{c,H01} = f_{c,H20} = 2 \cdot 7{,}6\text{ GHz} = 15{,}2\text{ GHz} > 15\text{ GHz}$.

Für die gewählte Cutoff-Frequenz ergibt sich:

$$a = \frac{c_0}{2f_c} = 19{,}7\text{ mm} \qquad b = \frac{a}{2} = 9{,}85\text{ mm}$$

H-Wellen in Rechteckhohlleitern

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c_0} \qquad \beta_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad f_c = \frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Die Relation $\beta_{mn}(\omega)$ nennt man auch Dispersionsrelation. Ein nichtlinearer Zusammenhang bedeutet eine dispersive Ausbreitung eines Impulses durch den Rechteckhohlleiter. D.h. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind unterschiedlich. Folgende Relationen gelten:

$$v_{ph} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \qquad v_{gr} = c_0\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \qquad v_{ph} \cdot v_{gr} = {c_0}^2$$

Nehmen wir das Beispiel mit $f_{c,H10} = 7{,}6\ \mathrm{GHz}$ und dem Betriebsbereich $10\ \mathrm{GHz} - 15\ \mathrm{GHz}$. Für einen Arbeitspunkt bei $f = 12\ \mathrm{GHz}$ erhalten wir:

$$v_{ph} = 1{,}29c_0 \qquad v_{gr} = 0{,}774c_0$$