

1 Vorbetrachtung

Bevor wir die Wellenausbreitung im freien Raum betrachten, wollen wir noch einmal die Koaxialleitung analysieren:

Die geführte Leistung einer Koaxialleitung (siehe Abschnitt STR) lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$P_h = \frac{1}{2} \Re(\underline{U} \cdot \underline{I}^*) \quad (1)$$

Anstelle einer Beschreibung mit Strom- und Spannungsamplituden lässt sich die Leistungsdichte auch mit Feldkomponenten in Form des Poynting-Vektors ausdrücken:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} (\underline{E} \times \underline{H}^*) \quad (2)$$

Die gesamte geführte Leistung erhält man dann mittels einer Integration über den Leitungsquerschnitt A senkrecht zur Ausbreitungsrichtung z :

$$P_h = \iint_A \Re(\underline{S}) \, d\vec{A} = \iint_A \Re(\underline{S}_z) \, dA \quad (3)$$

Nun wollen wir die Feldkomponenten aus Gl. (LEI 21) und (LEI 22) in einer Koaxialleitung in Gleichung (3) einsetzen, um einen Ausdruck für die geführte Leistung in Abhängigkeit von der Geometrie der Leitung zu erhalten:

$$\begin{aligned} \underline{S}_z &= \frac{1}{2} \underline{E}_r \cdot \underline{H}_\varphi^* \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-U}{r \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)} \right) \left(\frac{-I^*}{2\pi r} \right) = \frac{1}{2} \frac{U \cdot I^*}{2\pi r^2 \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)} \\ \Rightarrow P_h &= \frac{1}{2} \Re \left(\underbrace{\frac{U I^*}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{D}{d}\right)} \cdot 2\pi r}_{=1} dr \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Gl. (4) ist damit auch in Übereinstimmung mit Gl. (1). Mit dieser Abschätzung lässt sich erkennen, dass sich die Leistungsübertragung entlang der Leitung sowohl mit Strom und Spannung als auch mit elektromagnetischen Feldern beschreiben lässt. Da die Integration über den Querschnitt der Leitung offensichtlich die gesamte Leistung berücksichtigt, kann man Folgendes feststellen:

- Die geführte Leistung befindet sich ausschließlich im Dielektrikum *zwischen* Innen- und Außenleiter – dies gilt zumindest für eine Skin-Eindringtiefe $z_0 \ll d, D$
- Innen- und Außenleiter übernehmen nur die Führung der elektromagnetischen Welle. Sie tragen *nicht* zum Energietransport bei!
- Ohne diese Wellenführung lässt sich die Energie offenbar auch im freien Raum übertragen.

2 Maxwell'sche Gleichungen

Da wir gesehen haben, dass die Leistungsübertragung in einer Leitung mit Hilfe elektromagnetischer Wellen beschreibbar ist, wollen wir im Folgenden die Eigenschaften solcher Wellen ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen analysieren.

Durchflutungsgesetz: Die Wirbel des *magnetischen Feldes* \vec{H} werden bestimmt durch die elektrische Stromdichte \vec{J} einschließlich des Verschiebungsstroms $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Dieser Zusammenhang wird durch das *Durchflutungsgesetz* beschrieben:

$$\oint_A \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A}, \quad (5)$$

wobei \vec{D} die dielektrische Verschiebung darstellt. Wenn in Gl. (5) die Fläche A infinitesimal klein wird, lässt sich dieser integrale Zusammenhang auch als Differentialgleichung ausdrücken (siehe Abb. 1):

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6)$$

Hierbei bezeichnet ∇ den *Nabla*-Operator:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

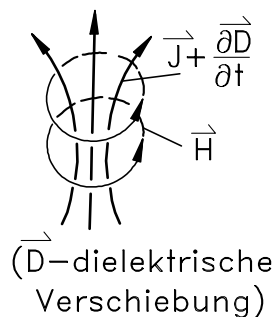


Abb. 1: Durchflutungsgesetz.

Induktionsgesetz: Die Wirbel des *elektrischen Feldes* \vec{E} werden bestimmt durch die Änderung der magnetischen Flussdichte \vec{B} . Dieser Zusammenhang wird durch das *Induktionsgesetz* beschrieben (siehe Abb. 2):

$$\oint_A \vec{E} d\vec{s} = - \iint_A \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{A} \quad (8)$$

Ähnlich wie oben, lässt sich auch dieser integrale Zusammenhang als Differentialgleichung ausdrücken:

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9)$$

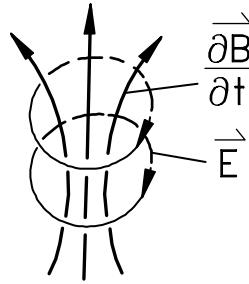


Abb. 2: Induktionsgesetz.

Feldprobleme der Hochfrequenztechnik lassen sich bereits mit den beiden Maxwell'schen Gleichungen (5) und (9) (Durchflutungs- und Induktionsgesetz) vollständig beschreiben.

Insgesamt gibt es aber vier Maxwell'sche Gleichungen, so dass noch hinzukommen:

Magnetische Flusslinien sind grundsätzlich geschlossen (siehe Abb. 3):

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0, \quad (10)$$

wobei F die Oberfläche eines geschlossenen Volumens beschreibt. Als Differentialgleichung stellt sich der Zusammenhang folgendermaßen dar:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (11)$$

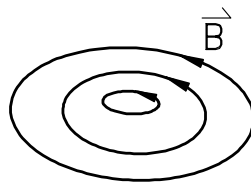


Abb. 3: Magnetische Feldlinien sind immer geschlossen.

Die Linien der dielektrischen Verschiebung beginnen und enden auf Ladungen (siehe Abb. 4):

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{F} = Q \quad (12)$$

wobei Q die elektrische Ladung innerhalb des durch F eingeschlossenen Volumens beschreibt. Als Differentialgleichung lässt sich der Zusammenhang folgendermaßen ausdrücken:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (13)$$

mit der Raumladungsdichte ρ .

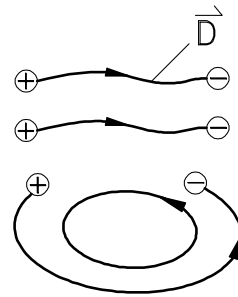


Abb. 4: Linien der dielektrischen Verschiebung.

Bei hochfrequenten Problemen (zeitveränderlichen $\vec{D}(t)$ bzw. $\vec{B}(t)$) folgen Gl. (11) und (13) automatisch aus Gl. (5) und (9).

Die Maxwell'schen Gleichungen lassen sich deutlich vereinfachen, wenn man die Feldgrößen im Frequenzbereich als Zeigergrößen darstellt. Nimmt man z.B. für die magnetische Feldstärke ein harmonisches Signal der Kreisfrequenz ω an, kann man das Signal folgendermaßen in Zeigerdarstellung schreiben:

$$\vec{H}(t) = \Re(\vec{H} \exp(j\omega t))$$

Wie man leicht sieht, ist die Ableitung nach der Zeit in Zeigerdarstellung durch eine einfache Multiplikation mit $j\omega$ beschreibbar, wodurch sich die Maxwell'schen Gleichungen vereinfachen:

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \quad (14)$$

$$-\text{rot } \vec{E} = -\nabla \times \vec{E} = j\omega \vec{B} \quad (15)$$

Für $\omega \neq 0$ folgt aus Gl. (14) und (15) unmittelbar auch Gl. (11) und (13), so dass die Maxwell'schen Gleichungen Gl. (14) und (15) die Basis für die folgende Betrachtung darstellen.

2.1 Materialgleichungen

Im letzten Abschnitt wurden die Feldgrößen behandelt, als ob sie voneinander unabhängig wären. In realen Materialien sind jedoch \vec{H} und \vec{B} sowie \vec{E} und \vec{D} meist miteinander in folgender Weise verknüpft:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (16)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (17)$$

Hierbei beschreiben ε_0 und μ_0 die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilitätskonstante im freien Raum, die jeweils Naturkonstanten darstellen. ε_r und μ_r sind dagegen die relative Dielektrizitätskonstante bzw. die relative Permeabilitätskonstante, die somit Materialeigenschaften beschreiben. Für Vakuum gilt z.B. $\varepsilon_r = \mu_r = 1$, während das häufig für Dielektrika verwendete Polyethylen ein $\varepsilon_r = 2,28$ und $\mu_r \approx 1$ aufweist.

2.2 Stromdichte

Die Stromdichte \vec{J} kann man in die drei Komponenten Leitungsstromdichte \vec{J}_L , Konvektionsstromdichte \vec{J}_K und eingepreßte Stromdichte \vec{J}_E aufteilen:

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_K + \vec{J}_E \quad (18)$$

Die drei Größen haben die folgende Bedeutung:

- $\vec{J}_L = \sigma \cdot \vec{E}$ ist die Leitungsstromdichte mit der spezifischen Leitfähigkeit des Materials σ .
- $\vec{J}_K = \rho \cdot \vec{v}$ berücksichtigt die Bewegung freier Ladungsträger durch äußere Kräfte (z.B. im Plasma), wobei \vec{v} die Geschwindigkeit beschreibt, mit der sich die Raumladungsdichte ρ bewegt.
- \vec{J}_E beschreibt die von außen erzwungene Stromdichte, wie sie z.B. bei Antennen vorkommt.

Setzen wir nun Gleichung (18) in die Maxwell'sche Gleichung Gl. (15) ein, so folgt:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\vec{E} + \sigma\vec{E} + \vec{J}_K + \vec{J}_E \quad (19)$$

Die ersten beiden Terme lassen sich zusammenfassen zu:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \cdot \vec{E} + \vec{J}_K + \vec{J}_E \quad (20)$$

mit der komplexen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega}$.

In ähnlicher Weise kann man auch die andere Maxwell'sche Gleichung mit einer komplexen Materialkonstante beschreiben:

$$-\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{H} \quad (21)$$

mit der komplexen Permeabilitätskonstanten $\mu = \mu_0\mu_r$, wobei der Imaginärteil von μ die magnetischen Verluste berücksichtigt.

3 Ebene Wellen

Die Gleichungen (20) und (21) beschreiben elektromagnetische Wellen in allgemeiner Weise. Im Folgenden wollen wir uns jedoch auf die meist zutreffende Annahme beschränken, dass keine eingepreßten Ströme und keine Konvektionsströme vorliegen: $\vec{J}_E = \vec{J}_K = 0$.

In diesem Fall vereinfachen sich Gl. (20) und (21) zu:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (22)$$

$$-\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{H} \quad (23)$$

Die einfachsten Lösungen für die Gl. (22) und (23) erhält man für homogenes, also ortsunabhängiges ϵ , μ . Setzt man beide Gleichungen ineinander ein, ergibt sich:

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = 0 \quad (24)$$

Mit der folgenden Identität aus der Vektoranalysis

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \vec{E})}_{=0 \text{ wegen } \nabla \cdot \vec{E}=0} - \Delta \vec{E}$$

ergibt sich die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke:

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon} \vec{E} = 0 \quad (25)$$

Hierbei beschreibt Δ den Laplace-Operator, der definiert ist als $\Delta \hat{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ für jede kartesische Komponente von \vec{E} .

Analog kann man die Wellengleichung auch für die magnetische Feldstärke herleiten

$$\Delta \vec{H} + \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon} \vec{H} = 0 \quad (26)$$

Ein einfaches Beispiel für eine Lösung von Gl. (25) ist die *ebene Welle*:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot \exp(-j(k_x x + k_y y + k_z z)) \quad (27)$$

Hierbei beschreibt \vec{r} den Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (28)$$

und \vec{k} den Wellenvektor

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, \quad (29)$$

in dessen Richtung sich die ebene Welle in Gleichung (27) ausbreitet.

Gl. (27) löst Gl. (25) mit:

$$(\vec{k})^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon} \quad (30)$$

Obige Gl. (27) beschreibt eine ebene Welle, da Flächen mit konstanter Phase $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r}$ Ebenen darstellen. Diese Phasenflächen stehen senkrecht auf \vec{k} und damit senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Weiterhin führt Gl. (27) in Gl. (23) eingesetzt auf:

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega \underline{\mu}} = \vec{H}_0 \cdot \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{H}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega \underline{\mu}} \quad (31)$$

Analog folgt aus Gl. (22):

$$\vec{E} = -\frac{\vec{k} \times \vec{H}}{\omega \underline{\epsilon}} \quad (32)$$

Aus den Gleichungen (31) und (32) folgt, dass \vec{E} , \vec{H} und \vec{k} bei ebenen Wellen jeweils senkrecht aufeinander stehen.

4 Polarisation

Wir wollen im Folgenden eine sich in z -Richtung ausbreitende ebene Welle betrachten und deren Eigenschaften genauer analysieren. Bei Ausbreitung in z -Richtung besitzt der Wellenvektor \vec{k} ausschließlich eine z -Komponente, so dass man schreiben kann:

$$j\vec{k} = \underline{\gamma}\vec{e}_z \quad \text{mit } \vec{e}_z \text{ Einheitsvektor in } z\text{-Richtung}$$

Mit dieser Schreibweise ergibt sich für die in z -Richtung ausbreitende ebene Welle:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \exp(-\underline{\gamma}z) \quad \text{mit } \underline{\gamma} = \sqrt{-\omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon}}$$

Man erkennt, dass dann, wenn das Argument der Exponentialfunktion rein imaginär wird, sich eine ungedämpfte Wellenausbreitung ergibt. Das Argument der Exponentialfunktion wird rein imaginär, wenn $\underline{\mu}$ und $\underline{\epsilon}$ positiv und reell sind.

Da der Wellenvektor \vec{k} in z -Richtung zeigt, liegen \vec{E} und \vec{H} in der xy -Ebene und stehen dort senkrecht aufeinander. Dieser Sachverhalt lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix} E_0 \exp(-\underline{\gamma}z) \quad (33)$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -\underline{a}_y \\ \underline{a}_x \end{pmatrix} H_0 \exp(-\underline{\gamma}z) \quad \text{mit } H_0 = \frac{E_0}{\underline{Z}_F} \quad (34)$$

Hierbei steht $\underline{Z}_F = \sqrt{\underline{\mu}/\underline{\epsilon}}$ für den Feldwellenwiderstand, der das Verhältnis zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke beschreibt. Im freien Raum ist der Feldwellenwiderstand rein reell:

$$\underline{Z}_F \Big|_{\text{Freiraum}} = Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega \quad (35)$$

Anmerkung: Streng genommen gilt der Zahlenwert in Gl. (35) nur, wenn für die Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zugrunde gelegt wird. Exakt gilt $Z_{F0} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \mu_0 \cdot c_0$ mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ und der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c_0 = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Der Jones-Vektor $\begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix}$ ist ein Einheitsvektor der Länge 1 $\Rightarrow |\underline{a}_x|^2 + |\underline{a}_y|^2 = 1$.

Er beschreibt den Polarisationszustand der Welle.

4.1 Polarisationszustände im Zeitbereich

Im Folgenden wollen wir einige spezielle Polarisationszustände und ihren zeitlichen Verlauf betrachten. Dabei wollen wir aus Vereinfachungsgründen von der Annahme ausgehen, dass eine ungedämpfte Wellenausbreitung mit $\underline{\gamma} = j\beta$ mit β rein reell vorliegt. Dann ergibt sich folgender zeitlicher Verlauf:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} \Re(\underline{a}_x \exp(-j\beta z) \exp(j\omega t)) \\ \Re(\underline{a}_y \exp(-j\beta z) \exp(j\omega t)) \end{pmatrix} \quad (36)$$

Wenn wir in Gl. (36) \underline{a}_x und \underline{a}_y nach Betrag und Phase schreiben:

$$\underline{a}_x = |\underline{a}_x| \exp(j\varphi_x) \quad (37)$$

$$\underline{a}_y = |\underline{a}_y| \exp(j\varphi_y), \quad (38)$$

ergibt sich:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} |\underline{a}_x| \cos[\omega t - \beta z + \varphi_x] \\ |\underline{a}_y| \cos[\omega t - \beta z + \varphi_y] \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Der elektrische Feldvektor in Gl. (36) bzw. Gl. (39) bewegt sich in Abhängigkeit von $(\omega t - \beta z)$ auf einer Ellipse, weshalb man im Allgemeinen auch von einem *elliptischen Polarisationszustand* spricht. Spezialfälle stellen die lineare bzw. die zirkulare Polarisation dar, die in Folgenden detaillierter betrachtet werden sollen.

4.2 Lineare Polarisation

Für $\varphi_x = \varphi_y$ bewegt sich der Feldvektor $\vec{E}(z, t)$ in Gl. (39) auf einer Linie, so dass man dann von *linearer Polarisation* spricht. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit lässt sich dann $\varphi_x = \varphi_y = 0$ und $|\underline{a}_x| = \cos \varphi$ sowie $|\underline{a}_y| = \sin \varphi$ setzen, so dass dann aus Gl. (39) folgt:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cos(\omega t - \beta z) \quad (40)$$

Der elektrische Feldvektor liegt in der xy -Ebene auf einer Geraden (siehe Abb. 5) im Winkel φ zur x -Achse.

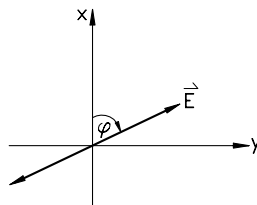


Abb. 5: Elektrischer Feldvektor bei linearer Polarisation.

4.3 Zirkulare Polarisation

Bei *zirkularer Polarisation* beschreibt der Vektor der elektrischen Feldstärke einen Kreis. Dabei weisen die x - und y -Komponenten des Jones-Vektors jeweils die gleiche Länge von $|\underline{a}_x| = |\underline{a}_y| = 1/\sqrt{2}$ auf und sind um $\pi/2$ zueinander phasenverschoben, d. h. beispielsweise:

$$\underline{a}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \underline{a}_y = \frac{\pm j}{\sqrt{2}} \quad (41)$$

Mit Gl. (36) und (39) kann man dann den zeitlichen Verlauf folgendermaßen beschreiben:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \beta z) \\ \mp \sin(\omega t - \beta z) \end{pmatrix} \quad (42)$$

Das Vorzeichen der y -Komponente bzw. die Phasenverschiebung von $-\pi/2$ oder $+\pi/2$ bestimmt, ob es sich um *rechtszirkulare* oder *linkszirkulare* Polarisation handelt:

rechtszirkular:

In Ausbreitungsrichtung gesehen dreht sich \vec{E} bei konstantem Ort z in Uhrzeigerichtung. Dieser Polarisationszustand entspricht Gl. (42) mit positivem Vorzeichen (+) bzw. negativem Vorzeichen in Gl. (41).

linkszirkular:

In Ausbreitungsrichtung gesehen dreht sich \vec{E} bei konstantem Ort z entgegengesetzt zum Uhrzeiger. Dieser Polarisationszustand entspricht Gl. (42) mit negativem Vorzeichen (–) bzw. positivem Vorzeichen in Gl. (41).

Abb. 6 zeigt beispielhaft den Verlauf des elektrischen Feldvektors bei linkszirkularer Polarisation.

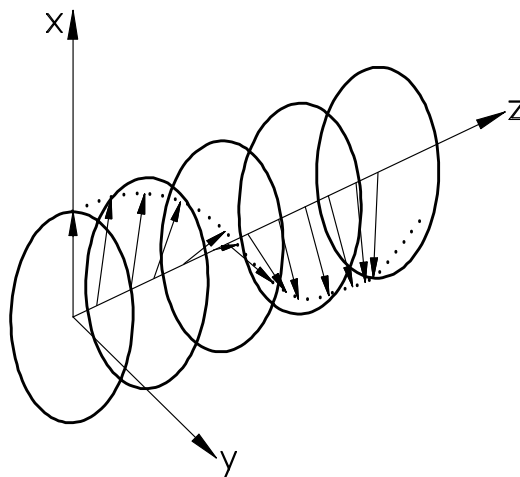


Abb. 6: Elektrischer Feldvektor bei linkszirkularer Polarisation.

4.4 Poincaré-Kugel

Alle möglichen Polarisationszustände lassen sich sehr elegant auf der sog. *Poincaré-Kugel* (Poincaré – französischer Mathematiker) darstellen, wie Abb. 7 zeigt. Die Pole repräsentieren dabei die links- bzw. rechtszirkulare Polarisation, während sich die linearen Polarisationszustände auf dem Äquator befinden. Ansonsten handelt es sich um elliptische Polarisationszustände.

Alternativ zum Jones-Vektor in Gl. (33) wird der Polarisationszustand häufig auch durch die Stokes-Parameter beschrieben. Wenn man wie in Abb. 8 die Poincaré-Kugel mit einem kartesischen Koordinatensystem versieht, ergeben sich die Stokes-Parameter S_1 , S_2 , S_3 als die jeweiligen Achsenabschnitte

eines Polarisationszustands P auf der Poincaré-Kugel. Zusätzlich zu S_1 , S_2 , S_3 gibt es noch einen vierten Stokes-Parameter S_0 , der die Intensität der Welle beschreibt. Wenn man $S_0 = 1$ setzt (Normierung), ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Stokes-Parametern und dem Jones-Vektor:

$$S_1 = |a_x|^2 - |a_y|^2 \quad (43)$$

$$S_2 = 2|a_x||a_y| \cos(\varphi_y - \varphi_x) \quad (44)$$

$$S_3 = 2|a_x||a_y| \sin(\varphi_y - \varphi_x) \quad (45)$$

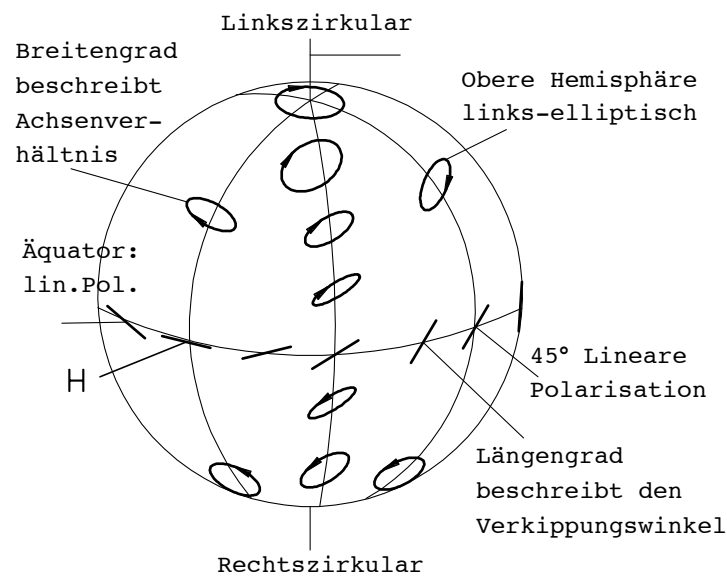


Abb. 7: Beispiele für Polarisationszustände auf der Poincaré-Kugel.

4.5 Lineare Doppelbrechung

Eine zirkulare Polarisation lässt sich beispielsweise aus linearer Polarisation gewinnen, indem man zwischen der x - und y -Feldkomponente eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ einführt. Das erreicht man nach Durchgang durch ein doppelbrechendes Medium. Wir betrachten ein Material mit linearer Doppelbrechung und x, y als Hauptachsen – d.h. die x - und y -Polarisation haben unterschiedliche Phasenkonstanten β_x und β_y mit

$$\beta_y = \beta_x + \Delta\beta. \quad (46)$$

Aus Gl. (33) folgt dann sinngemäß:

$$\vec{E}(z) = E_0 \begin{pmatrix} a_x(z=0) \cdot \exp(-j\beta_x z) \\ a_y(z=0) \cdot \exp(-j\beta_y z) \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} a_x(z=0) \\ a_y(z=0) \cdot \exp(-j\Delta\beta z) \end{pmatrix} \exp(-j\beta_x z) \quad (47)$$

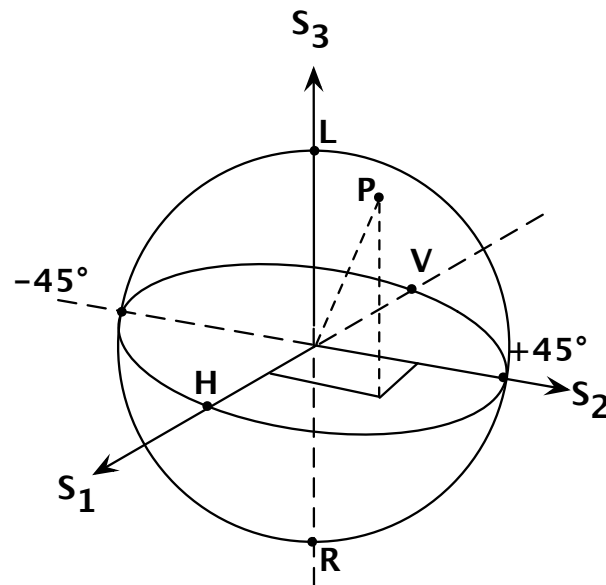


Abb. 8: Stokes-Parameter auf der Poincaré-Kugel.

Gehen wir nun bei $z = 0$ von einer linearen Doppelbrechung mit $\varphi = 45^\circ$ aus, erhalten wir für den Jones-Vektor vor dem doppelbrechenden Material ($z = 0$, vgl. Gl. (40)):

$$\underline{a}_x(z = 0) = \underline{a}_y(z = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nach der Ausbreitung durch das doppelbrechende Material erhalten wir an der Stelle z :

$$\underline{a}_x(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \underline{a}_y(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-j\Delta\beta z)$$

1. Bei einer Phasenverschiebung um $\pi/2$ erhalten wir *rechtszirkulare Polarisation*:

$$\Delta\beta \cdot z = \frac{\pi}{2} \quad (\text{entspricht } \frac{\lambda}{4}\text{-Platte in der Optik}) \quad \Rightarrow \underline{a}_y = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

2. Bei einer Phasenverschiebung um π *spiegelt* sich der Polarisationszustand an der x -Achse, da die y -Komponente nun das umgekehrte Vorzeichen aufweist:

$$\Delta\beta \cdot z = \pi \quad (\text{entspricht } \frac{\lambda}{2}\text{-Platte in der Optik}) \quad \Rightarrow \underline{a}_y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Bei einer Phasenverschiebung um $3\pi/2$ (entspricht $-\pi/2$) erhalten wir *linkszirkulare Polarisation*:

$$\Delta\beta \cdot z = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \underline{a}_y = \frac{j}{\sqrt{2}}$$

4. Bei einer Phasenverschiebung um 2π erhalten wir wieder den *ursprünglichen Polarisationszustand*:

$$\Delta\beta \cdot z = 2\pi \Rightarrow \underline{a}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Diese Transformation des Polarisationszustands lässt sich mit Hilfe der Poincaré-Kugel einfach veranschaulichen, indem man zunächst die beiden Eigenzustände des doppelbrechenden Mediums auf der Poincaré-Kugel markiert (für das obige Beispiel wäre das die x - bzw. y -Polarisation oder in Abb. 8 die Punkte H und V). Diese beiden Eigen-Polarisationszustände definieren eine Drehachse, um die der Eingangspolarisationszustand (im obigen Beispiel lineare Polarisation mit $\varphi = 45^\circ$) um den Winkel $\Delta\beta \cdot z$ auf der Poincaré-Kugel gedreht wird.