

1 Einleitung

Bisher haben wir als Wellenleiter nur die Zweidrahtleitung (z.B. Koaxialleitung) kennengelernt. Elektromagnetische Wellen können sich aber auch in anderen Leitungsstrukturen ausbreiten. So kann man sich beispielsweise die Frage stellen, inwieweit sich elektromagnetische Wellen auch innerhalb einer Koaxialleitung ausbreiten können, wenn der Innenleiter entfernt worden ist (man gelangt dann zum sogenannten Rundhohlleiter). Wir wollen uns hier zunächst auf den sogenannten Rechteckhohlleiter beschränken, wie er in Abb. 1 skizziert ist. Der Rechteckhohlleiter hat eine Breite a und eine Höhe

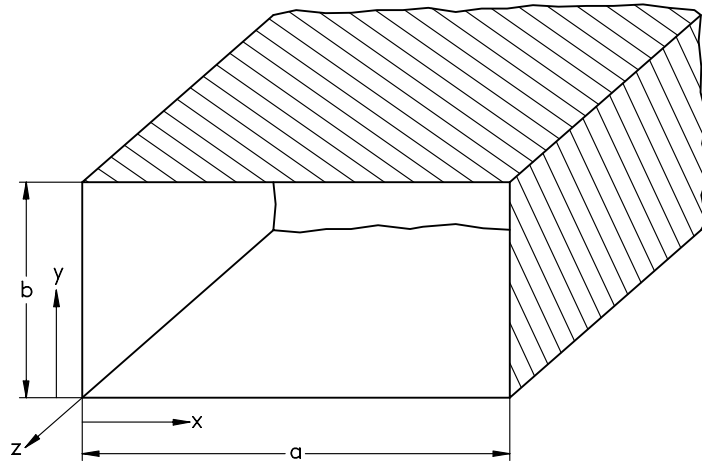


Abb. 1: Prinzip eines Rechteckhohlleiters

b und ist mit einer metallischen Berandung versehen. Wenn man sich am Beginn des Hohlleiters eine anregende Feldverteilung (oder eine Antenne) vorstellt, so könnte man die Wellenausbreitung im Hohlleiter ähnlich beschreiben wie im freien Raum, nur müsste zusätzlich die Reflexion an den metallischen Grenzflächen berücksichtigt werden. Dies wäre zwar prinzipiell möglich, ist aber doch recht aufwändig, so dass eine alternative Darstellung des Feldproblems gesucht werden soll.

2 Prinzipielle Darstellung des Feldproblems mit Eigenwellen

Falls sich der Querschnitt des Hohlleiters in z -Richtung nicht ändert, ist eine relativ elegante Lösung des Feldproblems mit Eigenwellen möglich. Wenn zunächst eine harmonische Zeitabhängigkeit vorausgesetzt wird, so dass das orts- und zeitabhängige Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ geschrieben wird als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \vec{E}(x, y, z) \exp(j\omega t) \right\} \quad (1)$$

mit dem komplexen Vektor-Zeiger $\vec{E}(x, y, z)$, so suchen wir bei einem Eigenwellen- (oder allgemeiner Eigenwert-) Problem nach Feldverteilungen im Hohlleiter, deren Form sich in z -Richtung nicht ändert. Diese Eigenwellen lassen sich im allgemeinen abzählen (z.B. Zählindex ν), so dass sich dann die

Feldverteilung für die ν -te Eigenwelle schreiben lässt

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) \\ \vec{H}(x, y, z) \end{aligned} \right|_{\nu\text{-te Eigenwelle}} = a_\nu \begin{aligned} \vec{E}_\nu(x, y) \exp(\mp j\beta_\nu z) \\ \vec{H}_\nu(x, y) \exp(\mp j\beta_\nu z) \end{aligned} \quad (2)$$

mit der transversalen Feldverteilung $\vec{E}_\nu(x, y)$, $\vec{H}_\nu(x, y)$ und der Phasenkonstanten β_ν für die ν -te Eigenwelle. Für einen verlustfreien Hohlleiter (verlustfreie metallische Berandung) ist β_ν entweder reell oder rein imaginär ($\hat{=}$ aperiodische Dämpfung). Das negative Vorzeichen vor β_ν in Gl. (2) steht dabei für eine Ausbreitung in positiver z-Richtung, während das positive Vorzeichen für Wellenausbreitung in negativer z-Richtung steht.

Eine wichtige Eigenschaft von Eigenwellen stellt deren **Orthogonalität** dar. Bei Verknüpfung des elektrischen Feldes der Eigenwelle ν und des magnetischen Feldes der Eigenwelle μ gilt (ohne Beweis):

$$\iint_A (\vec{E}_\nu \times \vec{H}_\mu^*) d\vec{A} = 0 \quad \text{für } \nu \neq \mu \quad (3)$$

Die doppelte Integration in Gl. (3) erstreckt sich über die Querschnittsfläche A des Wellenleiters. Gl. (3) gilt für verlustfreie Wellenleiter. Für verlustbehaftete Wellenleiter lässt sich auch eine Orthogonalitätsbeziehung aufstellen, bei der aber * „konjugiert komplex“ bei \vec{H}_μ in Gl. (3) entfällt.

2.1 Spezielle Eigenwellen

Als eine Eigenwelle haben wir die Grundwelle der Koaxialleitung im Abschnitt LEI kennengelernt. Das magnetische Feld hat dort nur eine φ -Komponente und das elektrische Feld hat nur eine r-Komponente. Sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld steht damit senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (z-Richtung) und man spricht von einer TEM-(transversal elektro-magnetischen) Welle. Für die Phasenkonstante der TEM-Welle gilt: $\beta = k_0 \sqrt{\mu\epsilon}$.

Wie wir später sehen werden, gibt es im Hohlleiter keine TEM-Wellen, sondern statt dessen H-Wellen (auch bezeichnet als TE-Wellen, TE = transversal elektrisch) oder E-Wellen (auch bezeichnet als TM-Wellen, TM = transversal magnetisch). Bei einer H-Welle gibt es in z-Richtung nur eine Komponente des magnetischen Feldes (H_z), während es bei einer E-Welle in z-Richtung nur eine Komponente des elektrischen Feldes (E_z) gibt.

2.2 Prinzipielle Lösung des Feldproblems mit Eigenwellen

Mit Eigenwellen ist tatsächlich eine besonders elegante Lösung des Feldproblems in Wellenleitern möglich. Nehmen wir an, an der Stelle $z=0$ am Anfang des Wellenleiters sei eine Feldverteilung $\vec{E}(x, y, z=0)$ vorgegeben. Diese Feldverteilung wird im allgemeinen mit keiner der Feldverteilungen \vec{E}_ν der einzelnen Eigenwellen des Wellenleiters übereinstimmen, so dass die Feldverteilung $\vec{E}(x, y, z=0)$ sich nur als Überlagerung der Felder \vec{E}_ν verschiedener Eigenwellen darstellen lässt:

$$\vec{E}(x, y, z=0) = \sum_\nu a_\nu \vec{E}_\nu(x, y) \quad (4)$$

Die zunächst unbekanntenen Anregungskoeffizienten a_ν lassen sich in eleganter Weise unter Verwendung der Orthogonalitätsbeziehung (3) bestimmen. Wenn man in Gl. (4) mit \vec{H}_μ^* das Kreuzprodukt bildet und über die Querschnittsfläche integriert, ergibt sich (Annahme: verlustfreier Wellenleiter)

$$\iint_A (\vec{E}(x, y, z=0) \times \vec{H}_\mu^*) d\vec{A} = \sum_\nu a_\nu \iint (\vec{E}_\nu \times \vec{H}_\mu^*) d\vec{A} = a_\mu \iint (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\mu^*) d\vec{A} \quad (5)$$

und damit für den Anregungskoeffizient:

$$a_\mu = \frac{\iint (\vec{E}(x, y, z=0) \times \vec{H}_\mu^*) d\vec{A}}{\iint (\vec{E}_\mu \times \vec{H}_\mu^*) d\vec{A}} \quad (6)$$

Bei Kenntnis des anregenden Feldes, der Eigenwellen sowie der Anregungskoeffizienten ist dann das Feldproblem allgemein gelöst gemäß:

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_\nu a_\nu \vec{E}_\nu(x, y) \exp(-j\beta_\nu z) \quad (7)$$

Die Darstellung ist noch insofern vereinfacht, dass in Gl. (7) nur das elektrische Feld und nur Eigenwellen mit Ausbreitung in positiver z-Richtung einbezogen wurden. Streng genommen muss auch das magnetische Feld mit einbezogen werden, wobei sich dann auch Eigenwellen mit Ausbreitung in negativer z-Richtung ergeben. Die grundsätzliche Vorgehensweise bleibt aber wie oben beschrieben.

3 Grundgleichungen zur Beschreibung der elektromagnetischen Felder im Hohlleiter

Da sich innerhalb des Hohlleiters keine Quellen befinden sollen, gelten die Maxwell'schen Gleichungen für den quellenfreien Fall ($\vec{J}_m = 0$, $\vec{J}_E = 0$, vgl. Abschnitt LA, Gl. (1), (2)).

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \underline{\epsilon} \vec{E} \quad (8)$$

$$-\nabla \times \vec{E} = j\omega \underline{\mu} \vec{H} \quad (9)$$

Weiterhin sollen nur Hohlleiter mit homogenem (d. h. ortsunabhängigen) $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$ betrachtet werden, so dass das elektrische bzw. magnetische Feld von den Vektorpotentialen \vec{A} , \vec{F} abgeleitet werden kann:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} \quad (10)$$

bzw.

$$\vec{E} = -\nabla \times \vec{F} \quad (11)$$

oder, wenn sowohl das Vektorpotential \vec{A} als auch \vec{F} vorhanden ist, ergibt sich mit Gl. (8), (9) (vgl. Abschnitt LA, Gl. (19), (20)):

$$\vec{E} = -\nabla \times \vec{F} + \frac{1}{j\omega \underline{\epsilon}} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (12)$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} + \frac{1}{j\omega \underline{\mu}} \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) \quad (13)$$

wobei für die Vektorpotentiale \vec{A} , \vec{E} die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0 \quad (14)$$

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (15)$$

mit $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ gelten (vgl. Abschnitt LA, Gl. (8), (10)).

Es ist zunächst nicht offensichtlich, warum die Behandlung des Feldproblems durch die Einführung der Vektorpotentiale \vec{A} , \vec{E} vereinfacht wird. Im allgemeinen hätten \vec{A} , \vec{E} jeweils 3 Komponenten, also A_x , A_y , A_z bzw. E_x , E_y , E_z , d.h. insgesamt gibt es für die Vektorpotentiale 6 Komponenten. Die Vereinfachung durch die Einführung der Vektorpotentiale besteht nun darin, dass ein allgemeines quellenfreies Feldproblem mit homogenem Dielektrikum mit nur 2 dieser 6 Komponenten beschrieben werden kann (ohne Beweis). Die verbleibenden 4 Komponenten von \vec{A} und \vec{E} können dann zu Null gesetzt werden. Damit kann das vollständige Feldproblem für die 6 Feldkomponenten E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z mit nur 2 Komponenten der Vektorpotentiale beschrieben werden. Es können 2 beliebige kartesische Komponenten von \vec{A} , \vec{E} gewählt werden, wobei die Wahl von der spezifischen Problemstellung abhängig gemacht werden kann. Für einen in z-Richtung ausgerichteten Hohlleiter wie z.B. in Abb. 1 ist es üblich, die z-Komponenten der Vektorpotentiale \vec{A} , \vec{E} für die Feldberechnung heranzuziehen.

3.1 Feldbeschreibung mit der Komponente A_z

Wir wollen zunächst untersuchen, welche Feldverteilungen sich nur mit der Komponente A_z des Vektorpotentials beschreiben lassen. Dazu wird angesetzt

$$\vec{E} = 0 \quad (16)$$

$$\vec{A} = \vec{e}_z \psi_E \quad (17)$$

mit dem Einheitsvektor in z-Richtung \vec{e}_z . Für das verbleibende skalare Potential ψ_E gilt die Wellengleichung

$$\Delta \psi_E + k^2 \psi_E = 0 \quad (18)$$

Die elektrischen und magnetischen Felder ergeben sich aus ψ_E wie folgt:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = -\vec{e}_z \times \nabla \psi_E \quad (19)$$

und damit

$$H_x = \frac{\partial \psi_E}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{\partial \psi_E}{\partial x}; \quad H_z = 0 \quad (20)$$

Das elektrische Feld ergibt sich dann mit Gl. (8) zu

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \vec{H}) \quad (21)$$

Das transversale elektrische Feld $\vec{E}_t = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ lässt sich dann in eleganter Weise schreiben

$$\vec{E}_t = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \psi_E) \quad (22)$$

bzw.

$$\underline{E}_x = \frac{1}{j\omega\underline{\epsilon}} \frac{\partial^2 \underline{\psi}_E}{\partial x \partial z}, \quad \underline{E}_y = \frac{1}{j\omega\underline{\epsilon}} \frac{\partial^2 \underline{\psi}_E}{\partial y \partial z} \quad (23)$$

und für

$$\underline{E}_z = -\frac{1}{j\omega\underline{\epsilon}} \left(\frac{\partial^2 \underline{\psi}_E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\psi}_E}{\partial x^2} \right) \quad (24)$$

was sich mit Gl. (18) auch schreiben lässt als

$$\underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\underline{\epsilon}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \underline{\psi}_E \quad (25)$$

Damit lassen sich mit dem skalaren Potential $\underline{\psi}_E$ nur Feldverteilungen beschreiben, bei denen für die z-Komponente des magnetischen Feldes $\underline{H}_z = 0$ gilt. Damit sind mit $\underline{\psi}_E$ bereits E- (bzw. TM-) Wellen beschreibbar, bei denen ja $\underline{H}_z = 0$ ist.

3.2 Feldbeschreibung mit der Komponente \underline{F}_z

Wenn man den zu Gl. (16), (17) dualen Ansatz macht

$$\vec{\underline{A}} = 0 \quad (26)$$

$$\vec{\underline{F}} = \underline{e}_z \underline{\psi}_H \quad (27)$$

gilt in Analogie zu Gl. (18) auch

$$\Delta \underline{\psi}_H + k^2 \underline{\psi}_H = 0 \quad (28)$$

und als Feldkomponenten ergeben sich

$$\vec{\underline{E}} = -\nabla \times \vec{\underline{F}} = -\underline{e}_z \times \nabla \underline{\psi}_H \quad (29)$$

bzw.

$$\underline{E}_x = -\frac{\partial \underline{\psi}_H}{\partial y}; \quad \underline{E}_y = \frac{\partial \underline{\psi}_H}{\partial x}; \quad \underline{E}_z = 0 \quad (30)$$

Das magnetische Feld ergibt sich in dualer Weise zu Gl. (21) als

$$\vec{\underline{H}} = -\frac{1}{j\omega\underline{\mu}} \nabla \times \vec{\underline{E}} = -\frac{1}{j\omega\underline{\mu}} (\nabla \times \vec{\underline{E}}) \quad (31)$$

und damit für das transversale magnetische Feld

$$\vec{\underline{H}}_t = \begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega\underline{\mu}} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \underline{\psi}_H) \quad (32)$$

bzw.

$$\underline{H}_x = \frac{1}{j\omega\underline{\mu}} \frac{\partial^2 \underline{\psi}_H}{\partial x \partial z}, \quad \underline{H}_y = \frac{1}{j\omega\underline{\mu}} \frac{\partial^2 \underline{\psi}_H}{\partial y \partial z} \quad (33)$$

\underline{H}_z ergibt sich analog zu Gl. (25):

$$\underline{H}_z = \frac{1}{j\omega\underline{\mu}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \underline{\psi}_H \quad (34)$$

Mit dem skalaren Potential $\underline{\psi}_H$ lassen sich somit Feldverteilungen mit $\underline{E}_z = 0$ und damit zum Beispiel auch H- (bzw. TE-) Wellen darstellen.

4 Eigenwellen des Rechteckhohlleiters

Es sollen nun Eigenwellen des Rechteckhohlleiters gesucht werden, d.h. wir suchen nur Feldlösungen entsprechend Gl. (2). Wir nehmen dabei ein verlustfreies Dielektrikum mit reellen $\underline{\epsilon} \rightarrow \epsilon$ und $\underline{\mu} \rightarrow \mu$ und ideal elektrisch leitenden Wänden an.

4.1 H-Wellen

Zunächst suchen wir nach H-Wellen, d.h. nach Eigenwellen, bei denen $\underline{E}_z = 0$ ist und die deshalb mit der skalaren Potentialfunktion $\underline{\psi}_H$ (vgl. Gl. (27)) beschrieben werden können:

$$\underline{\psi}_H(x, y, z) = a_\nu \underline{\psi}_{H,\nu}(x, y) \exp(\mp j\beta_\nu z) \quad (35)$$

wobei ν die ν -te Eigenwelle kennzeichnet. Der einfachste Ansatz für $\underline{\psi}_{H,\nu}(x, y)$ besteht in einem Produktansatz:

$$\underline{\psi}_{H,\nu}(x, y) = X(x)Y(y) \quad (36)$$

Wenn man die Wellengleichung für $\underline{\psi}_H$ aus Gl. (28) etwas anders schreibt

$$\frac{\Delta \underline{\psi}_H}{\underline{\psi}_H} + k^2 = 0 \quad (37)$$

und Gl. (35), (36) einsetzt, ergibt sich

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \beta_\nu^2 + k^2 = 0 \quad (38)$$

Da die Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ nur von x bzw. nur von y abhängen, müssen die Terme $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$ und $\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$ jeweils konstant sein. D.h.

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad (39)$$

und

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad (40)$$

wobei die Konstanten (zunächst willkürlich) als $-k_x^2$ und $-k_y^2$ bezeichnet werden. Zur Lösung von Gl. (38) müssen noch die Randbedingungen berücksichtigt werden, nämlich dass das tangentielle elektrische Feld an der Hohlleiterberandung (ideal elektrisch leitend) verschwinden muss. Dazu muss gelten:

$$E_y = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dX}{dx} = 0 \quad \text{mit} \quad x = 0, a \quad (41)$$

$$E_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dY}{dy} = 0 \quad \text{mit} \quad y = 0, b \quad (42)$$

Allgemeiner lassen sich diese beiden Randbedingungen ausdrücken durch

$$\frac{\partial \underline{\psi}_H}{\partial n} = 0 \quad (43)$$

wobei n die Normalenrichtung charakterisiert. Gl. (43) wird auch als *Neumann-Randbedingung* bezeichnet. Gl. (39) mit der Randbedingung (41) wird gelöst durch

$$X(x) = \cos(k_x x) \quad \text{mit} \quad k_x = m \frac{\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

und aus Gl. (40), (42) ergibt sich

$$Y(y) = \cos(k_y y) \quad \text{mit} \quad k_y = n \frac{\pi}{b}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (45)$$

Weiterhin folgt aus Gl. (38)-(40) die sogenannte Separationsbedingung

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + \beta_\nu^2 \quad (46)$$

k_x , k_y und β_ν können dabei interpretiert werden als die Komponenten des Wellenvektors in x-, y- bzw. z-Richtung (ähnlich wie bei ebenen Wellen, s. EB/6) Durch Kombination von Gl. (35), (36), (44), (45) sind damit H-Wellen im Rechteckhohlleiter charakterisiert durch die Potentialfunktion

$$\underline{\psi}_H = a_\nu \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cdot \exp(\mp j\beta_\nu z) \quad (47)$$

wobei die Eigenwelle ν durch die Ordnungszahlen m , n mit $m = 0, 1, 2, 3 \dots$ und $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ charakterisiert wird. Dabei ist allerdings die Kombination $m=n=0$ ausgeschlossen, da dann gemäß Gl. (29)-(39) alle Feldkomponenten verschwinden würden. Die Eigenwellen werden im folgenden durch die beiden Ordnungszahlen m , n charakterisiert, so dass wir die hier diskutierten H-Wellen als H_{mn} - (bzw. TE_{mn} -) Wellen bezeichnen und die Phasenkonstante $\beta_\nu \hat{=} \beta_{mn}$ sich ergibt gemäß

$$\beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (48)$$

mit der sogenannten Grenzwellenzahl k_c mit

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 \quad (49)$$

Da die Wellenzahl k gegeben ist als $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega / v$ (v -Phasengeschwindigkeit einer ebenen Welle im Dielektrikum mit ϵ , μ), lässt sich k auch als eine normierte Frequenz auffassen, so dass sich die Phasenkonstante β_{mn} auch schreiben lässt gemäß

$$\beta_{mn} = \frac{1}{v} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \quad (50)$$

mit der Grenzfrequenz

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} k_c = v k_c \quad (51)$$

Für Frequenzen oberhalb dieser Grenzfrequenz ω_c ist β_{mn} reell, die Eigenwelle ist also normal ausbreitungsfähig, während für $\omega < \omega_c$ β_{mn} imaginär wird, was einer in z-Richtung aperiodisch gedämpften Welle entspricht. Man kann nun die einzelnen Eigenwellen mit ihren Ordnungszahlen m , n bezüglich ihrer Grenzfrequenzen sortieren. Wir setzen dazu wie in Abb. 1 $a > b$ voraus. Explizit ergibt sich für die Grenzfrequenz von Gl. (51) mit Gl. (49):

$$\omega_c = v \sqrt{\left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2} \quad (52)$$

bzw. $f_c = \omega_c / 2\pi$

$$f_c = v \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2} \quad (53)$$

Alternativ lässt sich auch die Grenzwellenlänge $\lambda_c = v/f_c$ angeben:

$$\lambda_c = 1 / \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2} \quad (54)$$

Da die Ordnungszahlkombination $m=n=0$ ausgeschlossen ist, ergibt sich die kleinste Grenzfrequenz für die H_{10} -Welle ($m=1, n=0$) gemäß Gl. (53) zu

$$f_c \Big|_{10} = \frac{v}{2a} \quad (55)$$

Die Wellen mit den nächst höheren Grenzfrequenzen sind die H_{20} -Welle bzw. die H_{01} -Welle mit den Grenzfrequenzen

$$f_c \Big|_{20} = \frac{v}{a} = 2 \cdot f_c \Big|_{10} \quad (56)$$

und

$$f_c \Big|_{01} = \frac{v}{2b} \quad (57)$$

Für den praktischen Einsatz eines Hohlleiters ist es wichtig, dass er für einen möglichst großen Frequenzbereich einwellig ist, d.h. dass für einen möglichst großen Frequenzbereich nur eine Eigenwelle mit einer reellen Phasenkonstanten existiert. Da alle anderen Eigenwellen dann exponentiell gedämpft werden, wird bei einem längeren Hohlleiter nur diese eine Eigenwelle *überleben* mit ihrer eindeutig definierten Feldverteilung.

Die H_{20} -Welle hat gemäß Gl. (56) immer die doppelte Grenzfrequenz der H_{10} -Welle, so dass bestenfalls ein Rechteckhohlleiter mit einem Einwelligkeitsbereich über eine Oktave realisierbar ist. Um diesen Einwelligkeitsbereich auch wirklich zu realisieren, muss die Grenzfrequenz der H_{01} -Welle größer (oder gleich) sein als die Grenzfrequenz der H_{20} -Welle, also:

$$f_c \Big|_{01} = \frac{v}{2b} \geq f_c \Big|_{20} = \frac{v}{a} \quad (58)$$

bzw.

$$a \geq 2b \quad (59)$$

d.h. der Hohlleiter muss mindestens doppelt so breit wie hoch sein.

Beispiel: Für das X-Band (Frequenzbereich $8.2 \text{ GHz} < f < 12.4 \text{ GHz}$) wird der sogenannte R100-Hohlleiter ($R100 = 10 \text{ GHz}$ Mittenfrequenz) verwendet mit den Dimensionen

- $a = 22,860 \text{ mm}$
- $b = 10,160 \text{ mm}$

Dieser Hohlleiter besitzt bei Luftfüllung ($v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$) die Grenzfrequenzen:

$$f_c \Big|_{10} = 6,56 \text{ GHz}, \quad f_c \Big|_{20} = 13,12 \text{ GHz}, \quad f_c \Big|_{01} = 14,76 \text{ GHz},$$

so dass für Frequenzen

$$6,56 \text{ GHz} < f < 13,12 \text{ GHz}$$

nur die H_{10} -Welle ausbreitungsfähig ist.

4.2 Dispersionsdiagramm

In einem Dispersionsdiagramm wird der Zusammenhang zwischen der Phasenkonstanten β und der Frequenz ω (bzw. Wellenzahl k) dargestellt, woraus sich dann auch die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/\beta$ bzw. die Gruppengeschwindigkeit $v_{gr} = d\omega/d\beta$ und damit die Dispersion ermitteln lässt.

Der Zusammenhang zwischen β und k ist gemäß Gl. (48) gegeben und in Abb. 2 für den Fall $a = 2,25 \cdot b$ dargestellt.

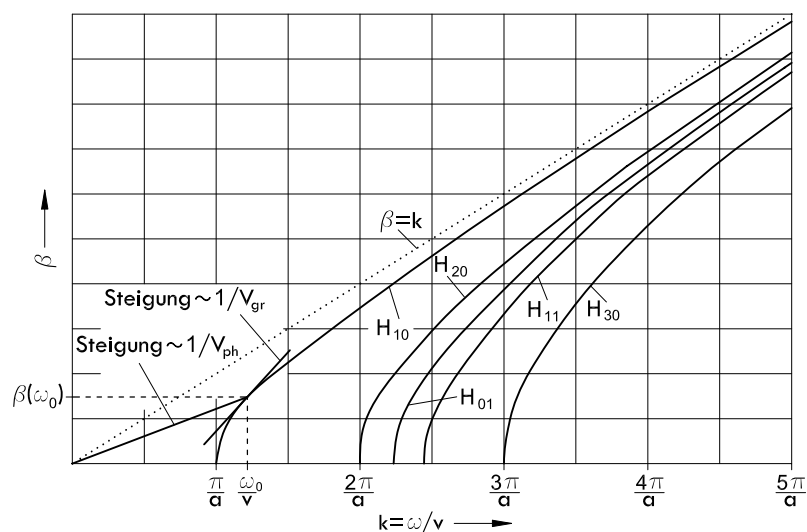


Abb. 2: Dispersionsdiagramm für die H_{mn} -Wellen im Rechteckhohlleiter

Wenn man beispielsweise den Hohlleiter in Abb. 2 bei der Frequenz $\omega = \omega_0$ betreibt, so lassen sich aus Abb. 2 anschaulich sowohl die Gruppen- als auch die Phasengeschwindigkeit der H_{10} -Welle erkennen. Formal ergeben sich Gruppen- und Phasengeschwindigkeit der H_{mn} -Welle aus Gl. (50) (Annahme $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ frequenzunabhängig):

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}} \quad (60)$$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta_{mn}} = v\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2} \quad (61)$$

Das Produkt von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ist konstant:

$$v_{ph} \cdot v_{gr} = v^2 \quad (62)$$

Nahe der Grenzfrequenz ($\omega \rightarrow \omega_c$) wird die Phasengeschwindigkeit unendlich, während die Gruppengeschwindigkeit gegen 0 geht. Für $\omega \rightarrow \infty$ hingegen nähern sich sowohl die Gruppen- als auch Phasengeschwindigkeit dem Wert v an. Unterschiedliche Eigenwellen besitzen damit unterschiedliche Gruppengeschwindigkeiten und damit unterschiedliche Signallaufzeiten durch den Hohlleiter. Auch um diese unterschiedlichen Signallaufzeiten zu vermeiden, ist der Betrieb des Hohlleiters im einwelligen Bereich erforderlich.

4.3 E-Wellen

Bisher haben wir nur die H-Wellen des Rechteckhohlleiters diskutiert. Mit den H-Wellen allein ist aber noch keine vollständige Beschreibung des Feldproblems im Hohlleiter möglich. Dazu werden noch die E-Wellen benötigt, bei denen in z-Richtung nur die E_z -Komponente existiert und $H_z = 0$ ist. Diese E-Wellen lassen sich ableiten aus der skalaren Potentialfunktion $\underline{\psi}_E$ (vgl. Gl. (17)), wobei sich ähnlich zu Gl. (35) für die ν -te Eigenwelle schreiben lässt:

$$\underline{\psi}_E(x, y, z) = a_\nu \underline{\psi}_{E,\nu}(x, y) \exp(\mp j\beta_\nu z) \quad (63)$$

wieder mit einem Produktansatz

$$\underline{\psi}_{E,\nu}(x, y) = X(x)Y(y) \quad (64)$$

wobei für $X(x)$, $Y(y)$ auch die Gl. (38)-(40) gelten. Auch bei E-Wellen muss das tangential elektrische Feld an der Hohlleiterberandung verschwinden:

$$\begin{aligned} E_y &= 0 \text{ für } x = 0, a \\ E_x &= 0 \text{ für } y = 0, b \\ E_z &= 0 \text{ für } x = 0, a \text{ und } y = 0, b \end{aligned}$$

Diese Randbedingungen führen auf

$$\underline{\psi}_E = 0 \quad (65)$$

entlang der Hohlleiterberandung (*Dirichlet-Problem*). Konkret bedeutet dies

$$X(x) = 0 \quad \text{mit} \quad x = 0, a \quad (66)$$

$$Y(y) = 0 \quad \text{mit} \quad y = 0, b \quad (67)$$

und damit für die Lösung von Gl. (39), (40):

$$X(x) = \sin(k_x x) \quad \text{für} \quad k_x = m \frac{\pi}{a}, m = 1, 2, 3, \dots \quad (68)$$

$$Y(y) = \sin(k_y y) \quad \text{für} \quad k_y = n \frac{\pi}{b}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (69)$$

wobei auch die Separationsbedingung Gl. (46) gelten muss. Die E-Wellen werden ähnlich wie die H-Wellen als E_{mn} - (bzw. TM_{mn} -) Wellen bezeichnet mit den Ordnungszahlen m, n . Der Unterschied zu den H_{mn} -Wellen besteht darin, dass die Ordnungszahlen $m, n > 1$ sein müssen, da für $m=0$ oder $n=0$ $\underline{\psi}_E$ und damit auch die Felder überall verschwinden würden. $\underline{\psi}_E$ für die E_{mn} -Welle lautet dann mit Gl. (63), (64), (68), (69) und $\nu \rightarrow mn$

$$\underline{\psi}_E = a_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \cdot \exp(\mp j\beta_{mn}z) \quad (70)$$

mit dem Anregungskoeffizient a_{mn} . Die Phasenkonstante β_{mn} der E_{mn} -Welle ist identisch zur Phasenkonstante der H_{mn} -Welle in Gl. (48). Damit sind auch die Grenzfrequenzen der E_{mn} -Wellen mit den Grenzfrequenzen der H_{mn} -Wellen identisch, wobei allerdings E_{0n} -Wellen bzw. E_{m0} -Wellen nicht existieren. Die kleinste Grenzfrequenz hat deshalb die E_{11} -Welle mit

$$f_c \Big|_{11} = \nu \sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b}\right)^2} \quad (71)$$

In einem Dispersionsdiagramm wie in Abb. 2 lassen sich auch die E-Wellen mit eintragen, wobei das Dispersionsdiagramm der E_{11} -Welle genau der H_{11} -Welle entspricht. Da aber zur H_{10} -Welle keine entsprechende E_{10} -Welle existiert, bleibt der oben diskutierte Einwelligkeitsbereich durch die E-Wellen unbeeinflusst.

Die E_{mn} -Wellen besitzen die gleiche Phasenkonstante wie die H_{mn} -Wellen. Derartige Wellen mit gleicher Phasenkonstante bezeichnet man auch als *entartete Eigenwellen*, wobei eine beliebige Überlagerung entarteter Eigenwellen auch wieder einer Eigenwelle entspricht.

Die E- und H-Wellen des Rechteckleiters bilden ein vollständiges System, so dass durch Überlagerung der Eigenwellen wie z.B. in Gl. (4) sich jede beliebige Feldverteilung darstellen lässt. Damit ist mit den oben diskutierten Eigenwellen eine allgemeine Lösung des Feldproblems möglich.

4.4 Feldverteilungen im Rechteckhohlleiter

Mit den Potentialfunktionen $\underline{\psi}_E$ bzw. $\underline{\psi}_H$ lassen sich gemäß Gl. (20)-(25) bzw. Gl. (30)-(34) alle Feldkomponenten angeben, so dass damit das Feldproblem vollständig gelöst ist.

In Abb. 3 sind für einige Eigenwellen Feldbilder angegeben. Am wichtigsten ist die H_{10} -Welle, da in einem einwelligen Hohlleiter nur die H_{10} -Welle ausbreitungsfähig ist. Interessant ist aber auch die

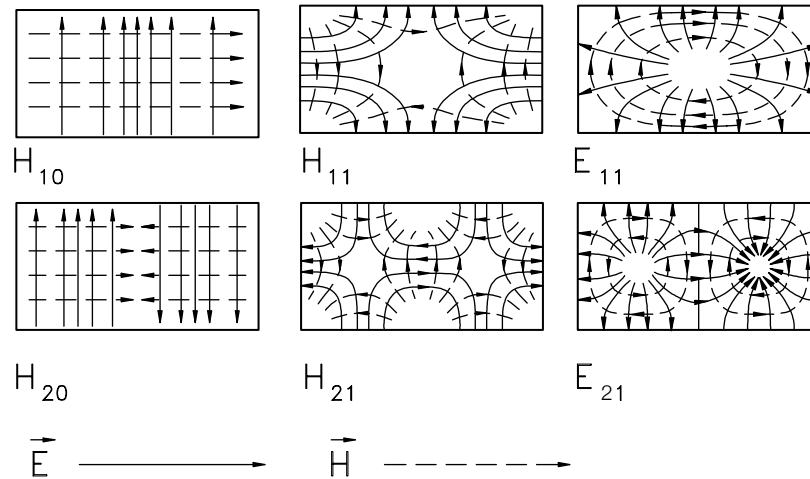


Abb. 3: Feldbilder von Eigenwellen niedriger Ordnung in Rechteckhohlleiter

E_{11} -Welle, deren Feldbild an das Feldbild der Koaxialleitung erinnert, nur dass der Innenleiter fehlt. Tatsächlich gibt es aber bei der E_{11} -Welle im Zentrum des Hohlleiters eine relativ starke E_z -Komponente, so dass der Leitungsstrom des Innenleiters der Koaxialleitung bei der E_{11} -Welle durch den Verschiebungsstrom ersetzt wird.

Am wichtigsten ist aber die H_{10} -Welle. Die Potentialfunktion $\underline{\psi}_H$ ergibt sich dann mit Gl. (47) mit $m=1$, $n=0$, wobei wir eine sich in $+z$ -Richtung ausbreitende Welle betrachten wollen:

$$\underline{\psi}_H = -\frac{a}{\pi} \underline{E}_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-j\beta z) \quad (72)$$

wobei die Konstante a_ν in (47) willkürlich zu $-(a/\pi)\underline{E}_0$ gewählt und die Indizierung bei der Phasenkonstante β weggelassen wurde. Mit Gl. (30)-(34) ergeben sich dann

$$\underline{E}_x = \underline{E}_z = 0, \quad \underline{H}_y = 0 \quad (73)$$

$$\underline{E}_y = \frac{\partial \underline{\psi}_H}{\partial x} = \underline{E}_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-j\beta z) \quad (74)$$

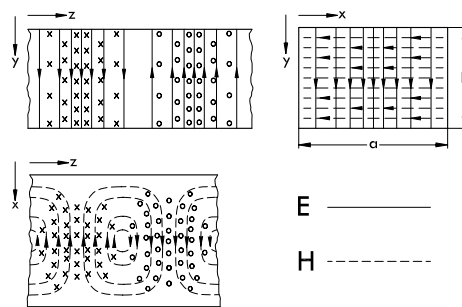
$$\underline{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \underline{\psi}_H}{\partial x \partial z} = -\frac{\beta}{\omega\mu} \underline{E}_y = -\frac{\beta}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \underline{E}_y \quad (75)$$

$$\underline{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu} (k^2 - \beta^2) \underline{\psi}_H = \frac{k_c^2}{j\omega\mu} \underline{\psi}_H = j \frac{k_c}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \underline{E}_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-j\beta z) \quad (76)$$

mit $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ und $k_c = \pi/a$ für die H_{10} -Welle. Ähnlich wie bei ebenen Wellen lassen sich auch bei den Eigenwellen des Hohlleiters Wellenwiderstände angeben, indem die transversalen Feldkomponenten miteinander verknüpft werden, so dass sich für die H_{10} -Welle ergibt

$$Z_F^{(H)} = \frac{\underline{E}_y}{-\underline{H}_x} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{k}{\beta} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}} \quad (77)$$

wobei $Z_F = \sqrt{\mu/\epsilon}$ den Feldwellenwiderstand einer ebenen Welle darstellt und von Gl. (48)-(51)

Abb. 4: Felder der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter

Gebrauch gemacht wurde. Gl. (77) gilt dabei nicht nur für die H_{10} -Welle, sondern ganz allgemein für H-Wellen. Die Feldbilder für die H_{10} -Welle in verschiedenen Schnittebenen sind in Abb. 4 dargestellt.

5 Dämpfung der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter

Bisher wurde der Hohlleiter als verlustfrei angenommen. Wie auch schon beispielsweise bei der Koaxialleitung sind die Eigenwellen auch im Hohlleiter gedämpft, wobei grundsätzlich sowohl dielektrische Verluste als auch ohm'sche Verluste auftreten. Die dielektrischen Verluste können im Hohlleiter sehr klein gehalten werden, aber die ohm'schen Verluste aufgrund der endlichen Leitfähigkeit der Hohlleiterberandung müssen berücksichtigt werden. Dazu werden die in der Hohlleiterberandung fließenden Wandströme benötigt.

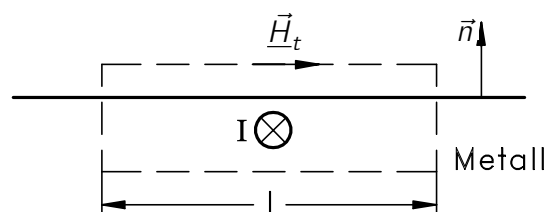


Abb. 5: Wandströme an metallischer Grenzfläche

Wenn wie in Abb. 5 ein tangenciales Magnetfeld an einer metallischen Grenzfläche anliegt, fließt in der metallischen Wand ein Strom I ($\hat{=}$ Wirbelstrom), der gegeben ist als

$$I = |\vec{H}_t| \cdot l \quad (78)$$

bzw. ein Strombelag (oder Flächenstrom)

$$|\vec{J}_f| = \frac{I}{j} = |\vec{H}_t| \quad (79)$$

oder in vektorieller Darstellung

$$\vec{J}_f = \vec{n} \times \vec{H}_t \quad (80)$$

mit dem Normalvektor \vec{n} aus Abb. 5.

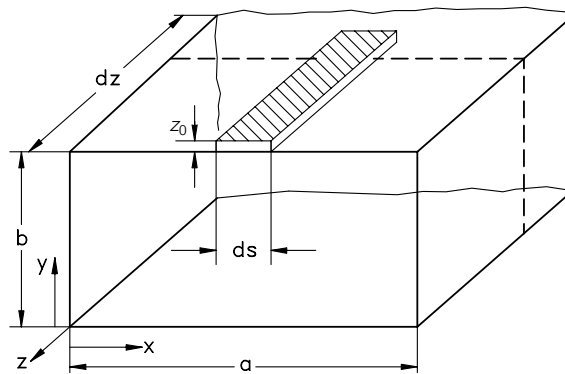


Abb. 6: Skizze eines Hohlleitersegments der Länge dz

Zur Berechnung der Verlustleistung aufgrund der Wandströme sei wie in Abb. 6 ein Hohlleitersegment der Länge dz betrachtet, von dem wiederum ein Umfangssegment der Länge ds betrachtet wird. Die Verlustleistung ∂P in dem so definierten schraffierten Bereich (Länge dz, Breite ds und Höhe $z_0 \hat{=} \text{Skin Eindringtiefe}$, $z_0 \ll a, b$) in Abb. 6 ergibt sich zu:

$$\partial P = -\frac{1}{2} R |\underline{I}|^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma z_0} \frac{dz}{ds} |\vec{H}_t|^2 (ds)^2 = -\frac{1}{2} R_w dz |\underline{H}_t|^2 ds \quad (81)$$

wobei ein Wandwiderstand

$$R_w = \frac{1}{\sigma z_0} \quad (82)$$

eingeführt wurde ($\sigma \hat{=} \text{spezifische Leitfähigkeit}$).

Anmerkung: Der Wandwiderstand lässt sich auch interpretieren als der Realteil des Feldwellenwiderstandes im Metall

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\underline{\epsilon}}} \quad \text{mit} \quad \underline{\epsilon} = -j \frac{\sigma}{\omega},$$

woraus sich ergibt

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j \mu_0 \omega}{\sigma}} \quad \text{und} \quad R_w = \Re(\underline{Z}_F) = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (82).

Als Zahlenwert gilt für die Skin-Eindringtiefe bei Kupfer:

$$z_0 = 2,1 \frac{\mu\text{m}}{\sqrt{f/\text{GHz}}} \quad (83)$$

und damit für den Wandwiderstand

$$R_w = 8,3 \cdot 10^{-3} \Omega \cdot \sqrt{f/\text{GHz}} \quad (84)$$

Die gesamte Verlustleistung dP im Wegelement dz ergibt sich aus ∂P in Gl. (81), integriert über den Umfang des Hohlleiters

$$dP = \oint \partial P = -\frac{1}{2} R_w dz \oint |\vec{H}_t|^2 ds \quad (85)$$

Diese Verlustleistung ist zu beziehen auf die geführte Leistung P im Hohlleiter:

$$P = \frac{1}{2} \iint_A \Re(\vec{E} \times \vec{H}^*) d\vec{A} \quad (86)$$

Die Dämpfungskonstante α ergibt sich als Realteil der Ausbreitungskonstante entsprechend

$$\vec{E} \sim \exp(-j\beta z - \alpha z) \quad (87)$$

woraus für die transportierte Leistung $P(z) \sim |\vec{E}|^2$ folgt:

$$P(z) = P_0 \exp(-2\alpha z) \quad (88)$$

woraus sich ergibt

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P \quad (89)$$

und damit:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{dP}{dz} \frac{1}{P} \quad (90)$$

Mit dP/dz aus Gl. (85) und P aus Gl. (86) folgt schließlich

$$\alpha = \frac{1}{2} R_w \frac{\oint |\vec{H}_t|^2 ds}{\iint_A \Re(\vec{E} \times \vec{H}^*) dA} \quad (91)$$

Wenn man Gl. (91) für die H_{10} -Welle mit den Feldkomponenten gemäß Gl. (73)-(76) auswertet, ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \oint |\vec{H}_t|^2 ds &= 2 \int_0^a (|\underline{H}_x|^2 + |\underline{H}_z|^2) dx + 2 \int_0^b |\underline{H}_z|^2 \Big|_{x=0,a} dy \\ &= \frac{1}{Z_F^2} |\underline{E}_0|^2 \left(a + \frac{2bw_c^2}{\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (92)$$

sowie

$$\iint_A \Re(\vec{E} \times \vec{H}^*) d\vec{A} = \frac{ab |E_0|^2}{4Z_F} \sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2} \quad (93)$$

woraus schließlich folgt:

$$\alpha = \frac{R_w}{Z_F} \frac{1/b + (2/a)(\omega_c/\omega)^2}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}} \quad (94)$$

α hat die Dimension 1/m . Um die Dämpfung in dB/m zu erhalten, ist der Wert mit 8,69 (=20/ln(10)) zu multiplizieren.

Beispiel:

Für einen luftgefüllten Hohlleiter ($Z_F = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi\Omega$) mit $a=2b$ und $\omega = 1.5\omega_c$ (Betrieb in der Mitte des Einwelligkeitsbereichs) folgt aus (93):

$$\alpha = 3,88 \frac{R_w}{aZ_F} \hat{=} 33,7 \text{ dB} \frac{R_w}{aZ_F} \quad (95)$$

woraus beispielsweise für einen luftgefüllten R58-Hohlleiter ($a=40.386$ mm) mit Cu-Berandung und damit R_w von Gl. (84) folgt

$$\alpha(f = 1,5 \cdot f_c = 5,57 \text{ GHz}) = 0,044 \frac{\text{dB}}{\text{m}} \quad (96)$$

Im Vergleich zu normalen Koaxialleitungen ist dieser Wert relativ gering, wobei allerdings die Koaxialleitung normalerweise einen sehr viel geringeren Querschnitt aufweist. Die Ohm'schen Verluste einer Koaxialleitung gemäß S. LEI/8 können in ähnlicher Form wie in Gl. (94) geschrieben werden

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{z_0\sigma} \frac{2\pi}{Z_F \ln\left(\frac{D}{d}\right)} \left(\frac{1}{\pi D} + \frac{1}{\pi d} \right) \quad (97)$$

wobei die Verluste minimal werden für $D/d = 3,6$ mit

$$\alpha = 3,6 \frac{R_w}{D \cdot Z_F} \quad (98)$$

mit dem Außendurchmesser D der Koaxialleitung. Bei gleicher Dimension sind damit die Verluste von Koaxialleitung und Hohlleiter ähnlich. Tatsächlich kann aber bei gegebener Arbeitsfrequenz der Hohlleiter erheblich größer sein als die Koaxialleitung (siehe auch die folgende Diskussion der Grenzfrequenzen der Koaxialleitung) und weiterhin entfallen die dielektrischen Verluste, so dass praktisch die Hohlleiterdämpfung deutlich niedriger als die Dämpfung von Koaxialkabeln bei jeweils der gleichen Arbeitsfrequenz ist.

Anmerkung:

Die obige Methodik zur Berechnung der Leitungsverluste ist nur gültig, solange nicht verschiedene Eigenwellen mit der gleichen Phasenkonstante existieren (Entartungsfall). Die obige Methodik kann daher angewandt werden für H_{m0} - oder H_{0n} -Wellen, nicht aber

für sonstige H_{mn} -Wellen, da dort eine Entartung zu den E_{mn} -Wellen vorliegt. Es würden sich dann aufgrund der Wandstromverluste neue Eigenwellen ergeben, die sich für die Ordnung (mn) als Überlagerung der jeweiligen H_{mn} - und E_{mn} -Welle darstellen. Im übrigen handelt es sich oben um eine Störungsrechnung, in der $\alpha \ll \beta$ vorausgesetzt ist.

6 Rundhohlleiter

Neben dem Rechteckhohlleiter sind auch andere Querschnitte denkbar, wobei der Rundhohlleiter von besonderer Bedeutung ist, da er auch drehbare Durchführungen erlaubt.

Auch beim Rundhohlleiter gibt es E- und H-Wellen, die als E_{lp} - bzw. H_{lp} -Wellen bezeichnet werden (l - Umfangsordnung, p - radiale Ordnung), die auch aus den Potentialfunktionen ψ_E bzw. ψ_H abgeleitet werden können. Der Ansatz ist ähnlich wie in Gl. (35), (36) bzw. (63), (64), nur dass der Produktansatz eine Funktion in radialer sowie in Umfangsrichtung beinhaltet, wozu Zylinderkoordinaten verwendet werden. Für einen Rundhohlleiter mit dem Radius a (bzw. Durchmesser $2a$) ergeben sich folgende Feldbilder für einige Eigenwellen niedriger Ordnung:

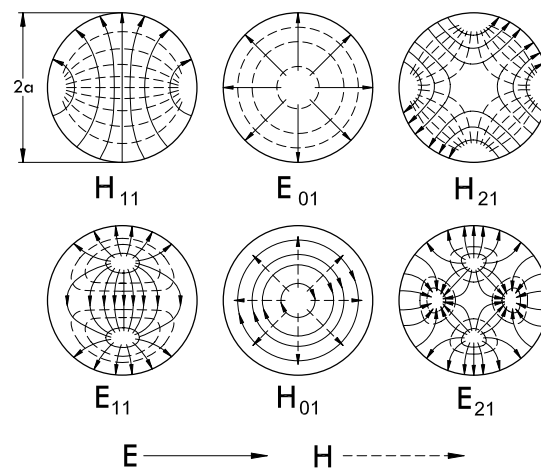


Abb. 7: Feldbilder von Eigenwellen niedriger Ordnung im Rundhohlleiter

Die Phasenkonstante β für die einzelnen Eigenwellen lässt sich schreiben wie beim Rechteckhohlleiter:

$$\beta^2 = k^2 - k_c^2 \quad (99)$$

mit der Grenzwellenzahl k_c (bzw. Grenzfrequenz $\omega_c = \nu k_c$ oder Grenzwellenlänge $\lambda_c = 2\pi/k_c$). Die Grenzwellenzahl k_c für die in Abb. 7 dargestellten Eigenwellen lässt sich Tabelle 1 entnehmen.

Die Grundwelle im Rundhohlleiter ist die H_{11} -Welle, deren Feldbild der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter sehr ähnlich ist.

Ein gewisses historisches Interesse verdient noch die H_{01} -Welle im Rundhohlleiter, da dort als tangentielle magnetische Feldkomponente \vec{H}_t an der metallischen Berandung nur die z-Komponente H_z

Eigenwelle	H_{11}	E_{01}	H_{21}	E_{11}	H_{01}	E_{21}
$k_c \cdot a$	1,841	2,405	3,054	3,832	3,832	5,136

Tabelle 1: Grenzwellenzahl einiger Eigenwellen im Rundhohlleiter

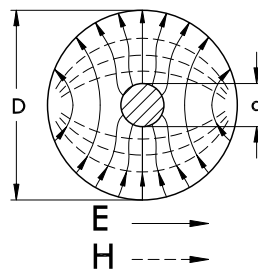
verbleibt. Bei hohen Frequenzen gilt näherungsweise $\underline{H}_z \sim 1/\omega$ (vergl. Gl. (76)), so dass sich dann für die Dämpfung $\alpha \sim R_w \cdot |\underline{H}_z|^2 \sim \omega^{-3/2}$ ergibt. Damit besitzt die H_{01} -Welle das ungewöhnliche Verhalten einer abnehmenden Dämpfung mit zunehmender Frequenz.

Bis Anfang der 70er Jahre wurde ernsthaft die Einführung breitbandiger Nachrichtenübertragungsstrecken auf der Basis der H_{01} -Welle im Rundhohlleiter erwogen. Statt dessen wurden dann aber faseroptische Übertragungssysteme eingeführt.

6.1 Hohlleiterwellen der Koaxialleitung

Auch bei Koaxialleitungen können sich bei genügend hohen Frequenzen neben der TEM-Grundwelle auch Hohlleiterwellen ausbreiten. Die Ausbreitung der Hohlleiterwellen in der Koaxialleitung ist jedoch unerwünscht, so dass die Koaxialleitung nur bei Frequenzen unterhalb der ersten Grenzfrequenz einer Hohlleiter-Eigenwelle betrieben werden sollte.

Wie beim Rundhohlleiter hat auch die H_{11} -Welle bei der Koaxialleitung die niedrigste Grenzfrequenz aller Hohlleiterwellen (Die Grenzfrequenz der TEM-Welle ist natürlich = 0). Die Feldverteilung der H_{11} -Welle der Koaxialleitung ist in Abb. 8 skizziert. Sie ist sehr ähnlich zur

Abb. 8: Feldbild der H_{11} -Welle der Koaxialleitung

Feldverteilung im Rundhohlleiter in Abb. 7. Die Grenzwellenlängen λ_c dieser Hohlleiterwellen sind in Abb. 9 als Funktion des Verhältnisses von Innen- und Außendurchmesser d/D dargestellt.

Die Werte für $d=0$ entsprechen dabei dem normalen Rundhohlleiter in Tabelle 1. Für die H_{11} -Welle (niedrigste Grenzfrequenz der Hohlleiterwellen) gilt näherungsweise für die Grenzwellenlänge

$$\lambda_c \approx \frac{\pi}{2}(d + D) \quad (100)$$

bzw. für die Grenzwellenzahl

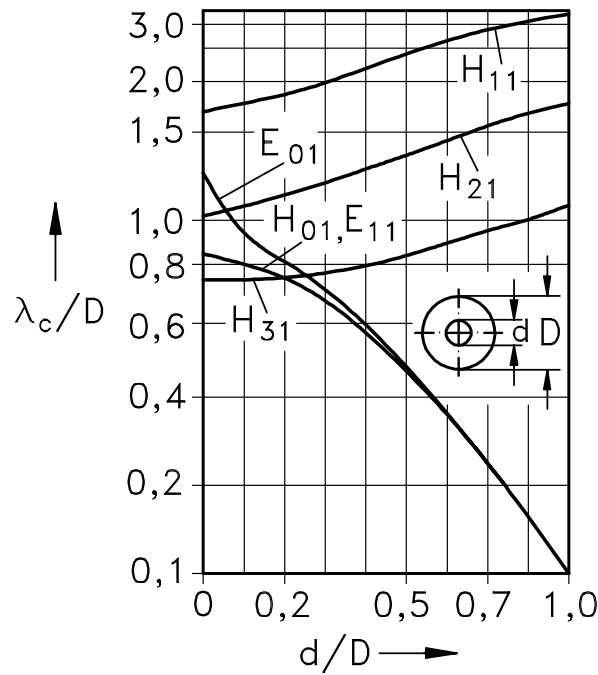


Abb. 9: Grenzwellenlängen der Koaxialleitung

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \approx \frac{4}{d+D} \quad (101)$$

Damit ergibt sich für die Koaxialleitung minimaler Dämpfung mit $D/d=3.6$:

$$k_c \cdot D \approx 3.13$$

und damit für die Grenzfrequenz

$$f_c |_{H_{11}} = \omega_c/2\pi = v \cdot k_c/2\pi \approx \frac{v}{2 \cdot D} \quad (102)$$

Eine Koaxialleitung sollte deshalb immer unterhalb der durch Gl. (102) gegebenen Grenzfrequenz betrieben werden

Beispiel:

Eine Koaxialleitung mit $D = 9,5 \text{ mm}$ und $v = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ($\hat{=} \epsilon_r = 2,25$) führt auf eine Grenzfrequenz $f_c |_{H_{11}} \approx 10,5 \text{ GHz}$. Um eine Koaxialleitung beispielsweise noch bei 40 GHz zu betreiben, sollte $D \leq 2,5 \text{ mm}$ sein.