

1 Normierte Wellenamplituden in Hohlleitern

Auch bei Hohlleitern ist es zweckmäßig, normierte leistungsbezogene Wellenamplituden \underline{a} , \underline{b} ähnlich wie bei den Zweidrahtleitungen einzuführen. Es wird der Rechteckhohlleiter mit der H_{10} -Welle und den transversalen Feldkomponenten \underline{E}_y und \underline{H}_x betrachtet. Die von der Welle (mit Ausbreitung in $+z$ -Richtung) geführte Leistung P^+ ergibt sich aus der Integration des Poynting-Vektors über die Querschnittsfläche des Hohlleiters als

$$P^+ = \frac{1}{2} \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a -\underline{E}_y \cdot \underline{H}_x^* dx dy \quad (1)$$

Wenn man nun die Feldkomponenten \underline{E}_y und \underline{H}_x als Funktion der geführten Leistung P^+ darstellen will, so sind die Feldkomponenten proportional zu $\sqrt{P^+}$, so dass sich das transversale elektrische und magnetische Feld der H_{10} -Welle darstellen lässt mit normierten Feldern e_y und h_x als:

$$\underline{E}_y = \sqrt{2P^+} e_y \exp(-j\beta z) \quad (2)$$

$$\underline{H}_x = \sqrt{2P^+} h_x \exp(-j\beta z) \quad (3)$$

mit

$$e_y = \sqrt{\frac{2Z_F^{(H)}}{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (4)$$

$$h_x = -\sqrt{\frac{2}{abZ_F^{(H)}}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad (5)$$

wobei $Z_F^{(H)}$ den Feldwellenwiderstand der H_{10} -Welle mit $Z_F^{(H)} = -\underline{E}_y/\underline{H}_x$ bezeichnet. Die Vorfaktoren in Gl. (4) und (5) sind so gewählt worden, dass einerseits Gl. (1) erfüllt ist und andererseits auch $Z_F^{(H)} = -e_y/h_x$. Die Normierung der Feldkomponenten e_y und h_x drückt sich darin aus, dass

$$\int_{y=0}^b \int_{x=0}^a -e_y h_x dx dy = 1 \quad (6)$$

gilt. Die hinlaufende Welle lässt sich auch durch die leistungsbezogene Wellenamplitude

$$\underline{a}(z) = \sqrt{2P^+} \exp(-j\beta z) \quad (7)$$

beschreiben, dass sich statt Gl. (2) und (3) ergibt:

$$\underline{E}_y = \underline{a}(z) e_y \quad (8)$$

$$\underline{H}_x = \underline{a}(z) h_x \quad (9)$$

Entsprechend lässt sich die rücklaufende Welle (Ausbreitungsrichtung in $-z$ -Richtung) mit der geführten Leistung P^- durch die Wellenamplitude $\underline{b}(z)$

$$\underline{b}(z) = \sqrt{2P^-} \exp(+j\beta z) \quad (10)$$

beschreiben, gemäß

$$\underline{E}_y = \underline{b}(z)e_y \quad (11)$$

$$\underline{H}_x = -\underline{b}(z)h_x, \quad (12)$$

wobei das negative Vorzeichen für \underline{H}_x eingeführt werden muss, damit die Leistung der rücklaufenden Welle auch in negativer z -Richtung transportiert wird. Ist gleichzeitig eine hin- und rücklaufende Welle vorhanden, so ergibt sich als Überlagerung

$$\underline{E}_y = [\underline{a}(z) + \underline{b}(z)] e_y \quad (13)$$

$$\underline{H}_x = [\underline{a}(z) - \underline{b}(z)] h_x \quad (14)$$

Die „netto“ transportierte Wirkleistung unter der Annahme verlustfreier Wellenleiter ergibt sich zu:

$$P = \frac{1}{2} \Re \left[\iint -\underline{E}_y \underline{H}_x^* dx dy \right] = \frac{1}{2} [|\underline{a}(z)|^2 - |\underline{b}(z)|^2] = P^+ - P^- \quad (15)$$

Diese Beziehungen entsprechen genau den Beziehungen der Zweidrahtleitung (Kapitel STR), so dass es naheliegt, auch den Hohlleiter wie die Zweidrahtleitung mit Strömen und Spannungen zu beschreiben.

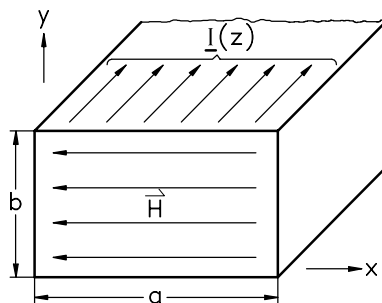


Abb. 1: Querschnitt eines Hohlleiters mit H_{10} -Welle und Stromverteilung.

Den Gl. (13) und (14) entsprechen bei der Zweidrahtleitung:

$$\underline{U}(z) = \sqrt{Z_L} [\underline{a}(z) + \underline{b}(z)] \quad (16)$$

$$\underline{I}(z) = \frac{1}{\sqrt{Z_L}} [\underline{a}(z) - \underline{b}(z)] \quad (17)$$

Es liegt deshalb nahe, dem elektrischen Feld \underline{E}_y eine Spannung $\underline{U}(z)$ und dem magnetischen Feld \underline{H}_x einen Strom $\underline{I}(z)$ zuzuordnen. Die geeignete Wahl des dem Hohlleiter zuzuordnenden Leitungswellenwiderstandes $Z_L \rightarrow Z_L^{(H)}$ ist zunächst noch offen. Aus Gl. (13) folgt:

$$\sqrt{Z_L^{(H)}} \underline{E}_y = \sqrt{Z_L^{(H)}} [\underline{a}(z) + \underline{b}(z)] e_y = \underline{U}(z) e_y, \quad (18)$$

womit eine Beziehung der zuzuordnenden Spannung $\underline{U}(z)$ mit dem elektrischen Feld \underline{E}_y gegeben ist. Für die Zuordnung zwischen Strom $\underline{I}(z)$ und dem magnetischen Feld \underline{H}_x gilt entsprechend:

$$\frac{1}{\sqrt{Z_L^{(H)}}} \underline{H}_x = \underline{I}(z) h_x \quad (19)$$

Auf diese Weise lassen sich die transversalen Felder der H_{10} -Welle durch Ströme und Spannungen ersetzen, wobei durch die hier gewählte Systematik sichergestellt ist, dass die transportierte Leistung P gemäß Gl. (15) durch $P = 1/2 \cdot \Re(\underline{U}\underline{I}^*)$ beschrieben wird. Der effektive Leitungswellenwiderstand $Z_L^{(H)}$ wird nun so festgelegt, dass $\underline{I}(z)$ gerade dem in den Hohlleiterbreitseiten fließenden Strom in axialer Richtung entspricht, d. h.

$$\underline{I}(z) = \int_0^a -\underline{H}_x \, dx = \underline{I}(z) \sqrt{Z_L^{(H)}} \int_0^a -h_x \, dx. \quad (20)$$

Mit Gl. (5) ergibt sich dann:

$$Z_L^{(H)} = \frac{\pi^2 b}{8a} Z_F^{(H)} = \frac{\pi^2 b}{8a} \frac{Z_F}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad \text{mit } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (21)$$

Beispiel: Die H_{10} -Welle in einem Rechteckwellenleiter mit $a = 2b$, $\mu = \mu_0$ und $\epsilon = \epsilon_0$ wird betrieben bei $f = 1,5f_c$. Es ergibt sich dann ein Leitungswellenwiderstand von $Z_L^{(H)} = 312 \, \Omega$.

Da wir nun einen Hohlleiter genauso beschreiben können wie eine Zweidrahtleitung, lässt sich auch für den Hohlleiter ein Leitungersatzschaltbild (Kapitel LEI) angeben. Ein infinitesimal langes Leitungsstück der Länge dz lässt sich prinzipiell beschreiben gemäß Abb. 2 mit dem Längsreaktanzbelag X' ($\omega L'$ bei der Zweidrahtleitung) und dem Queradmittanzbelag Y' ($\omega C'$ bei der Zweidrahtleitung).

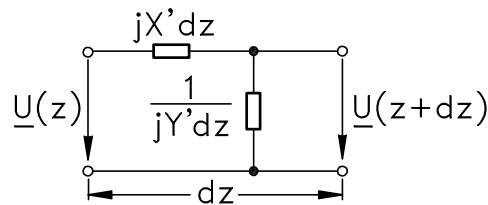


Abb. 2: Allgemeines Ersatzschaltbild eines infinitesimal kurzen Leitungsstücks.

Es gelten

$$Z_L^{(H)} = \sqrt{\frac{X'}{Y'}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{X'Y'}, \quad (22)$$

so dass sich mit $Z_L^{(H)}$ nach Gl. (21) und $\beta = \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$ ergibt:

$$X' = Z_L^{(H)} \cdot \beta = \omega \frac{\pi^2 \mu b}{8a} \quad (23)$$

$$Y' = \frac{\beta}{Z_L^{(H)}} = \frac{8\epsilon a}{\pi^2 b} \left(\omega - \frac{\omega_c^2}{\omega} \right) \quad (24)$$

Damit lässt sich das Leitungersatzschaltbild für die H_{10} -Welle des Rechteckhohlleiters angeben gemäß Abb. 3

Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises L_p , C' dz entspricht dabei gerade der Grenzfrequenz f_c der H_{10} -Welle.

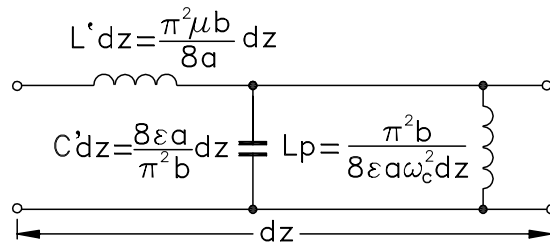


Abb. 3: Ersatzschaltbild der H_{10} -Welle eines infinitesimal kurzen Hohlleiterstücks.

Wenn man ohne Kenntnis des Hohlleiters einen Wellenleiter entwerfen sollte, dessen Leitungersatzschaltbild Abb. 3 entspricht, so könnte man folgendermaßen vorgehen:

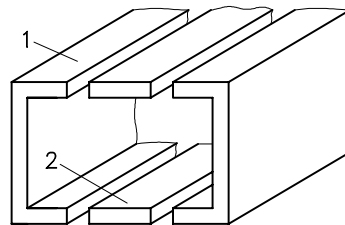


Abb. 4: Übergang von einer Zweidrahtleitung bestehend aus den zwei Platten 1 und 2 zu einem Hohlleiter.

Die Platten 1,2 in Abb. 4 repräsentieren eine normale Zweidrahtleitung mit L' , C' . Um die Induktivität L nachzubilden, müssen die Platten leitend miteinander verbunden werden, was zweckmäßig durch Schließen der Zweiplattenleitung zu einem Hohlleiter geschieht.

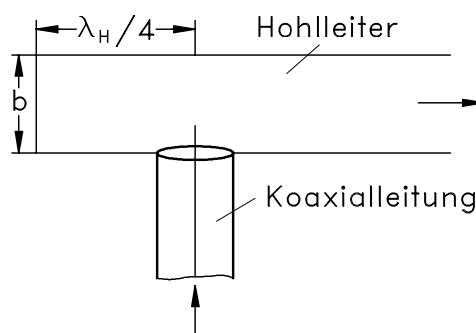


Abb. 5: Übergang zwischen einer Koaxialleitung und einem Hohlleiter.

Der Übergang zwischen einer Koaxialleitung und einem Hohlleiter kann prinzipiell wie in Abb. 5 geschehen. Allerdings hat die Koaxialleitung im Allgemeinen einen sehr viel kleineren Leitungswellenwiderstand als der Hohlleiter. Für eine breitbandige Anpassung ist es deshalb zweckmäßig, durch Reduzierung von b oder durch Stege den Leitungswellenwiderstand des Hohlleiters zu reduzieren (siehe Gl. (21)).

2 Wellenleiterverzweigungen

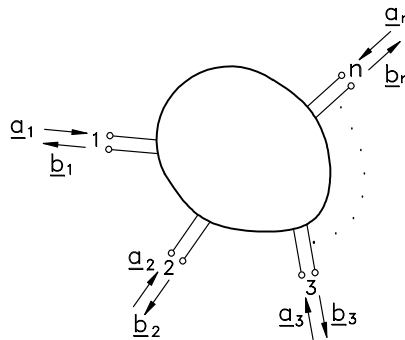


Abb. 6: Mehrtor mit n Toren.

Es werden Mehrtores mit n Toren betrachtet. Die Tore können beispielsweise mit Zweidrahtleitungen oder mit Hohlleitern realisiert sein. Bei Hohlleitern mit mehreren ausbreitungsfähigen Eigenwellen wird dann jeder Eigenwelle ein eigenes Tor zugeordnet. Die Tore werden durch die jeweils hineinlaufende Wellenamplitude \underline{a}_i und die hinauslaufende Wellenamplitude \underline{b}_i charakterisiert. Ein Mehrtor kann dann durch eine Streumatrix $\underline{\mathbf{S}}$ beschrieben werden (siehe auch Kapitel STR):

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_n \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}} \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \quad (25)$$

Netzwerke können häufig als weitgehend verlustfrei angesehen werden. Für ein verlustfreies Netzwerk stellt $\underline{\mathbf{S}}$ eine *unitäre Matrix* dar.

Beweis: Für ein verlustfreies Netzwerk ist die hineinlaufende Leistung ($\sum |\underline{a}_i|^2$) gleich der herauslaufenden Leistung ($\sum |\underline{b}_i|^2$), d.h.

$$\sum_{i=1}^n |\underline{a}_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\underline{b}_i|^2 \quad (26)$$

Mit der Einführung der Vektoren

$$\vec{\underline{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\underline{b}} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_n \end{pmatrix} \quad (27)$$

beziehungsweise der transponierten Vektoren $\vec{\underline{a}}^T = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ und $\vec{\underline{b}}^T = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ lässt sich obige Beziehung (26) formulieren als:

$$\vec{\underline{a}}^{*T} \vec{\underline{a}} = \vec{\underline{b}}^{*T} \vec{\underline{b}}, \quad (28)$$

wobei * 'komplex konjugiert' darstellt. Mit Gl. (25) folgt daraus:

$$\vec{\underline{a}}^{*T} \vec{\underline{a}} = (\underline{\mathbf{S}}^* \vec{\underline{a}}^*)^T \underline{\mathbf{S}} \cdot \vec{\underline{a}} = \vec{\underline{a}}^{*T} \underline{\mathbf{S}}^{*T} \underline{\mathbf{S}} \cdot \vec{\underline{a}} \quad (29)$$

Die rechte und die linke Seite sind nur dann für beliebige hineinlaufende Wellenamplituden identisch, wenn

$$\underline{\mathbf{S}}\underline{\mathbf{S}}^{*T} = \mathbf{E}, \quad (30)$$

wobei \mathbf{E} die Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (31)$$

darstellt, so dass Gl. (30) auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\underline{\mathbf{S}}^{-1} = \underline{\mathbf{S}}^{*T} \quad (32)$$

Gleichung (32) beschreibt eine unitäre Matrix. *q. e. d.*

Ein verlustfreies Netzwerk wird damit durch eine unitäre Matrix charakterisiert, d. h. die invertierte Streumatrix muss gleich sein der konjugiert komplexen transponierten Streumatrix. Gl. (32) stellt ein wichtiges Hilfsmittel zur Herleitung von Streuparametern dar.

Weiterhin gilt (ohne Beweis), dass passive Netzwerke reziprok sind. Voraussetzung dafür ist, dass Dielektrikum und Permeabilität durch Skalare oder zumindest durch symmetrische Tensoren ($\underline{\epsilon}$) und ($\underline{\mu}$) charakterisiert werden. Eine Ausnahme davon ist z. B. der Ferrit im Gleichmagnetfeld. Reziproke Netzwerke werden durch symmetrische Streumatrizen beschrieben, für die gilt:

$$\underline{S}_{ij} = \underline{S}_{ji} \quad (33)$$

2.1 Magisches T

Beispiel für eine Hohlleiterverzweigung mit vier Toren ist das Magische T (Auch *Magic T* oder E-H-Verzweigung) gemäß Abb. 7.

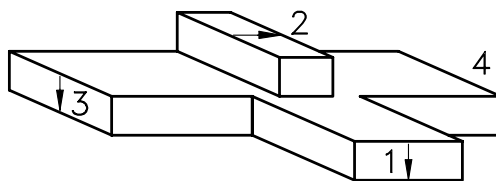


Abb. 7: Magisches T.

Im Folgenden soll das Magische T als verlustfrei und reziprok angenommen werden. Da die H_{10} -Welle an Tor 1 im Tor 2 auf Grund der anderen Feldverteilung keine H_{10} -Welle anregen kann, gilt zunächst

$$\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21} = 0 \quad (34)$$

weiterhin kann durch geeignete Anpasselemente in den Wellenleitern 1 und 2 (die Bausymmetrie bezüglich der Tore 3 und 4 darf dabei nicht gestört werden) Eigenreflexionsfreiheit mit $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = 0$

erreicht werden. Mit der Reziprozität gilt $\underline{S}_{ij} = \underline{S}_{ji}$ und wegen der Bausymmetrie ergibt sich $\underline{S}_{13} = \underline{S}_{14}$ und $\underline{S}_{24} = -\underline{S}_{23}$, so dass man für die Streumatrix zunächst schreiben kann:

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \underline{S}_{13} & \underline{S}_{13} \\ 0 & 0 & \underline{S}_{23} & -\underline{S}_{23} \\ \underline{S}_{13} & \underline{S}_{23} & \underline{S}_{33} & \underline{S}_{34} \\ \underline{S}_{13} & -\underline{S}_{23} & \underline{S}_{34} & \underline{S}_{44} \end{pmatrix} \quad (35)$$

In verlustfreien Netzwerken ist die Streumatrix unitär, so dass aus $\underline{\mathbf{S}}\underline{\mathbf{S}}^{*T} = \mathbf{E}$ folgt:

- 1. Zeile · 1. Spalte ergibt $2|\underline{S}_{13}|^2 = 1$
- 2. Zeile · 2. Spalte ergibt $2|\underline{S}_{23}|^2 = 1$
- 2. Zeile · 3. Spalte ergibt $\underline{S}_{23}(\underline{S}_{33}^* - \underline{S}_{34}^*) = 0$ und damit auch $\underline{S}_{33} = 0$ sowie $\underline{S}_{34} = 0$
- 1. Zeile · 3. Spalte ergibt $\underline{S}_{13}(\underline{S}_{34}^* + \underline{S}_{44}^*) = 0$ und damit auch $\underline{S}_{44} = 0$

Durch geeignete Wahl der Bezugsebenen an den Toren 1 und 2 werden \underline{S}_{13} und \underline{S}_{23} reel mit

$$\underline{S}_{13} = \underline{S}_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (36)$$

so dass sich für die gesamte Streumatrix des Magischen T's schließlich ergibt:

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Mit Hilfe eines Magischen T's ist eine Überlagerung einfallender Wellen der Tore 1 und 2 an den Toren 3 und 4 möglich, und zwar am Tor 3 in Phase und am Tor 4 in Gegenphase. Derartige Verzweigungen sind beispielsweise für Gegentaktanordnungen zweckmäßig. Eine derartige Überlagerung ist auch mit Richtkopplern möglich, die im Folgenden behandelt werden.

2.2 Richtkoppler



Abb. 8: Richtkoppler als Viertor.

Das Grundprinzip eines Richtkopplers ist folgendes: Eine am Tor 1 eingespeiste Welle wird an die Tore 3 und 4 gekoppelt, nicht aber an Tor 2 (isoliertes Tor). Entsprechend erfolgt eine Kopplung vom Tor

3 zu den Toren 1 und 2, jedoch nicht zum Tor 4 usw. Wir wollen einen eigenreflexionsfreien und bausymmetrischen Aufbau voraussetzen, d.h.:

$$\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = \underline{S}_{33} = \underline{S}_{44} = 0 \quad (38)$$

Bei Einkopplung am Tor 1 soll an Tor 2 keine Leistung gekoppelt werden, d.h. $\underline{S}_{21} = 0$ (und damit $\underline{S}_{12} = 0$ wegen Reziprozität). Wegen der Bausymmetrie gilt dann auch $\underline{S}_{34} = 0 = \underline{S}_{43}$ und $\underline{S}_{13} = \underline{S}_{24}$ sowie $\underline{S}_{14} = \underline{S}_{23}$, so dass sich die Streumatrix (Reziprozität vorausgesetzt) mit nur noch 2 unbekannten Streuparametern ergibt zu:

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \underline{S}_{13} & \underline{S}_{14} \\ 0 & 0 & \underline{S}_{14} & \underline{S}_{13} \\ \underline{S}_{13} & \underline{S}_{14} & 0 & 0 \\ \underline{S}_{14} & \underline{S}_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Für einen verlustfreien Richtkoppler muss die Streumatrix unitär sein, was bedeutet:

- 1. Zeile · 1. Spalte ergibt $|\underline{S}_{13}|^2 + |\underline{S}_{14}|^2 = 1$
- 1. Zeile · 2. Spalte ergibt $\underline{S}_{13}\underline{S}_{14}^* + \underline{S}_{14}\underline{S}_{13}^* = 0$ bzw. $\Re(\underline{S}_{13}\underline{S}_{14}^*) = 0$

Diese Bedingung lässt sich so interpretieren, dass \underline{S}_{13} und \underline{S}_{14} in der komplexen Ebene aufeinander senkrecht stehen müssen. Für eine geeignete Wahl der Bezugsebenen an den Toren 1-4 wird \underline{S}_{13} reell, so dass sich schreiben lässt

$$\underline{S}_{13} = \sqrt{1 - \kappa^2} \quad (40)$$

$$\underline{S}_{14} = \pm j\kappa, \quad (41)$$

wobei κ den Koppelfaktor angibt. Der Ausdruck $-20 \log \kappa$ wird als *Koppeldämpfung* (in dB) bezeichnet. Einen Koppler mit beispielsweise $\kappa = 1/\sqrt{2}$ bezeichnet man deshalb als *3-dB-Koppler*.

2.3 Beispiel: Richtkoppler mit TEM-Wellen

Eine einfache Kopplung – beabsichtigt oder auch unbeabsichtigt – ist möglich zwischen zwei parallel verlaufenden TEM-Leitungen (Zweidrahtleitungen). Damit lässt sich ein Richtkoppler gemäß Abb. 9 entwerfen.

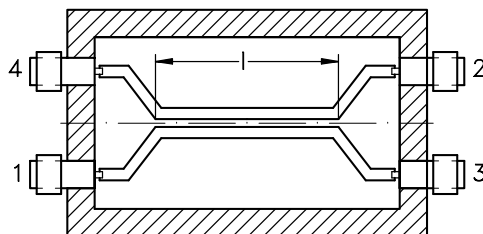


Abb. 9: Realisierung eines Richtkopplers mit Streifenleitungen.

Bei Anpassung der Tore (Eigenreflexionsfreiheit) erfolgt **nur ein Nahnebensprechen** zwischen den Toren 1 und 4 bzw. Tor 2 und Tor 3, aber **kein Fernnebensprechen** zwischen den Toren 1 und 2 bzw. Tor 3 und Tor 4.

Zur Erläuterung werde ein symmetrischer Richtkoppler, bestehend aus 2 parallelen Leitungen der Länge $l \ll \lambda/4$ betrachtet (s. Abb. 10).

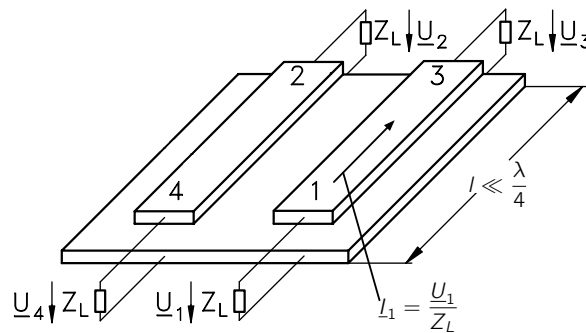


Abb. 10: Richtkoppler.

Die Leitungen seien schwach gekoppelt und jeweils mit ihrem Wellenwiderstand Z_L abgeschlossen. In das Tor 1 laufe eine Welle hinein (Spannung \underline{U}_1 und Strom \underline{I}_1), und die Überkopplung zu den Toren 2 und 4 werde betrachtet, wobei $\underline{S}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ und $\underline{S}_{41} = \frac{\underline{U}_4}{-\underline{U}_1}$.

Für die Kopplung muss sowohl die kapazitive als auch die induktive Kopplung betrachtet werden. Für $l \ll \lambda/4$ lässt sich die Kopplung in Form diskreter Elemente angeben wie in Abb. 11 dargestellt.

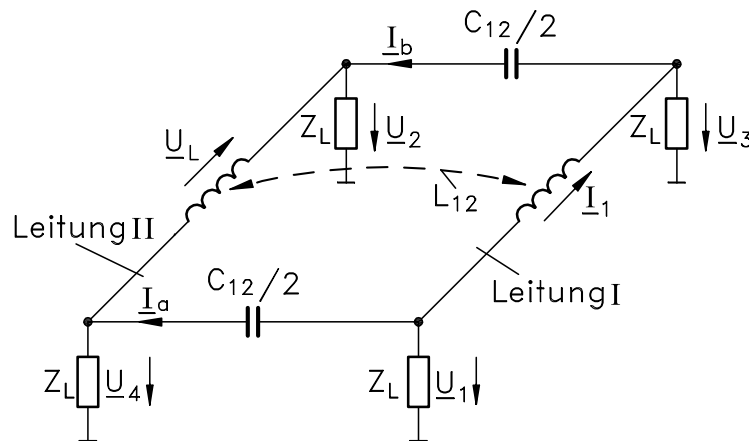


Abb. 11: Beschreibung der Kopplung innerhalb eines Richtkopplers in Form diskreter Elemente.

Die Koppelkapazität zwischen den Leitern drückt sich aus durch C_{12} , während die induktive Kopplung durch L_{12} berücksichtigt wird.

Die folgende Rechnung beschränkt sich auf schwache Kopplung ($\omega L_{12} \ll Z_L$, $\omega C_{12} \ll 1/Z_L$) und Einspeisung einer Welle am Tor 1.

Auf Grund des Stromes $I_1 = \underline{U}_1/Z_L$ wird in der Leitung II eine Spannung

$$\underline{U}_L = j\omega L_{12}I_1 = j\omega L_{12}\frac{\underline{U}_1}{Z_L} \quad (42)$$

induziert. Auf Grund der kapazitiven (schwachen) Kopplung ergeben sich die Ströme

$$I_a = j\omega\frac{C_{12}}{2}\underline{U}_1 \quad (43)$$

$$I_b = j\omega\frac{C_{12}}{2}\underline{U}_3 \quad (44)$$

Damit ergeben sich schließlich die Spannungen an den Toren 2 und 4:

$$\underline{U}_2 = (I_a + I_b)\frac{Z_L}{2} - \frac{\underline{U}_L}{2} = \frac{\underline{U}_1}{2} \left(j\omega \left[C_{12}Z_L - \frac{L_{12}}{Z_L} \right] \right) \quad (45)$$

$$\underline{U}_4 = (I_a + I_b)\frac{Z_L}{2} + \frac{\underline{U}_L}{2} = \frac{\underline{U}_1}{2} \left(j\omega \left[C_{12}Z_L + \frac{L_{12}}{Z_L} \right] \right) \quad (46)$$

wobei wegen der kurzen Leitung noch von $\underline{U}_1 \approx \underline{U}_3$ Gebrauch gemacht wurde.

Die kapazitive und die induktive Kopplung sind voneinander abhängig. Insbesondere gilt bei TEM-Leitungen mit homogenem Dielektrikum um die Leiter in Abb. 10(ohne Beweis):

$$\frac{L_{12}}{C_{12}} = Z_L^2 \quad (47)$$

und damit $\underline{U}_2/\underline{U}_1 = 0$ (kein Fernnebensprechen), was auch bei längeren Leitungen und stärkerer Kopplung gilt. Für das Nahnebensprechen gilt damit

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \underline{S}_{41} = j\omega C_{12} \cdot Z_L \quad (48)$$

Gl. (48) gilt nur bei schwacher Kopplung zwischen kurzen Leitungen. Der allgemeinere Fall lässt sich behandeln mit der Theorie der *Mehrfachleitungen*.

$$\underline{S}_{41} = \frac{j\kappa_L \sin(\beta l)}{\sqrt{1 - \kappa_L^2 \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}} \quad \text{mit} \quad \kappa_L = \frac{C'_{12}}{C'_1 + C'_{12}}, \quad (49)$$

wobei C'_{12} den Belag der Koppelkapazität und C'_1 den normalen Kapazitätsbelag der Leitung I bezeichnet. Die maximale Überkopplung ergibt sich zu $\underline{S}_{41} = \kappa_L$ für $\beta \cdot l = \pi/2$ (entspricht einer Koppellänge von $l = \lambda/4$). Für kleine Koppellängen und geringe Kopplung reduziert sich Gl. (49) mit $C_{12} = C'_{12} \cdot l$ zu Gl. (48).

Andere Leitungsrealisierungsmöglichkeiten speziell für 3-dB-Koppler (auch bezeichnet als 90°-Hybride) sind beispielsweise der *Branchline-Koppler* (s. Abb. 12a)) und der *Lange-Koppler* (s. Abb. 12b)).

Mit Leitungen können auch Strukturen aufgebaut werden, deren Streumatrix einem Magischen T entspricht (180°-Hybrid, s. Abb. 13).

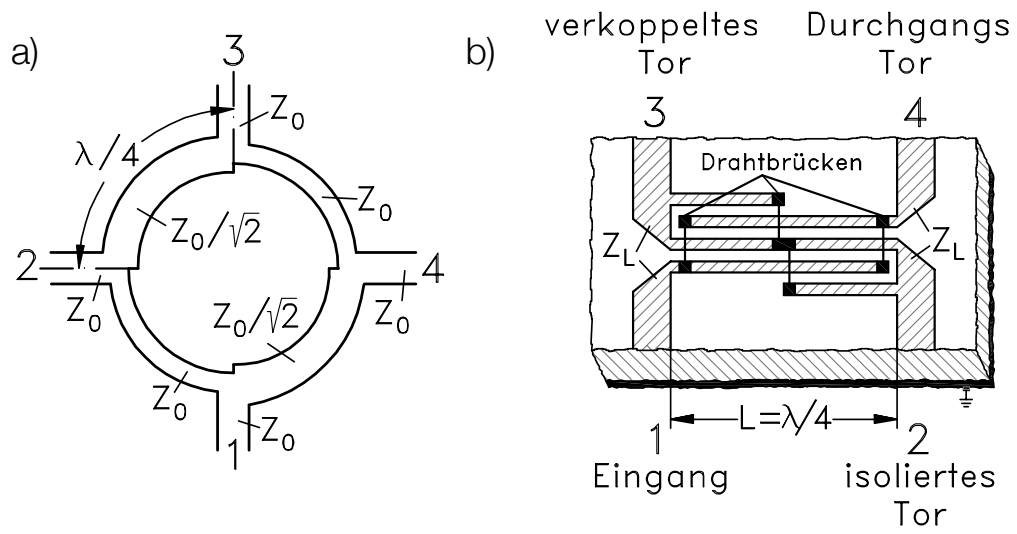


Abb. 12: Ausführungsformen von 3 dB-Richtkopplern. a) Branchline-Koppler, b) Lange-Koppler.

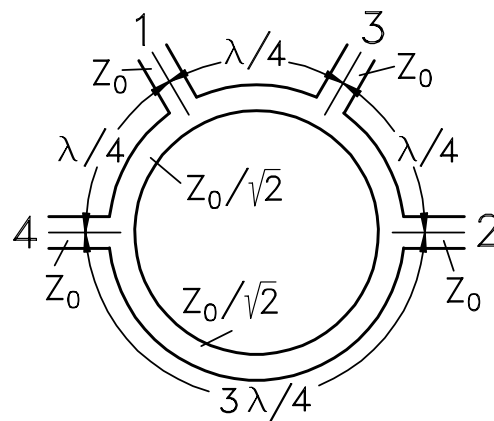


Abb. 13: Realisierung eines 180°-Hybrids (Magisches T) als Ring-Koppler.

3 Einwegleitungen und Zirkulatoren

Für gewisse Anwendungen sind auch nichtreziproke Netzwerke von Interesse, bei denen also $\underline{S}_{ij} \neq \underline{S}_{ji}$ ist. Wie auf S. HS/6 ausgeführt, sind passive Netzwerke immer reziprok, es sei denn, der $(\underline{\epsilon})$ - bzw. $(\underline{\mu})$ -Tensor ist unsymmetrisch.

Für die Realisierung von passiven nichtreziproken Netzwerken müssen deshalb Materialien mit unsymmetrischen $(\underline{\epsilon})$ - bzw. $(\underline{\mu})$ -Tensor eingesetzt werden. Ein Beispiel für ein derartiges Material stellt ein vormagnetisierter Ferrit dar. Wird ein Ferrit mit einem Gleichmagnetfeld in z-Richtung gesättigt, erhält man mit dem Zusammenhang des Zeigers der (hochfrequenten) Flussdichte und dem Magnetfeld

$$\vec{B} = (\underline{\mu})\vec{H} \quad (50)$$

einen Tensor (ohne Beweis):

$$(\underline{\mu}) = \begin{pmatrix} \underline{\mu}_{11} & \underline{\mu}_{12} & 0 \\ \underline{\mu}_{21} & \underline{\mu}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\mu}_{33} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Dabei sind $\underline{\mu}_{11}$, $\underline{\mu}_{22}$ und $\underline{\mu}_{33}$ im Wesentlichen reell, während $\underline{\mu}_{12} = -\underline{\mu}_{21}$ imaginär wird.¹ Der $(\underline{\mu})$ -Tensor in Gl. (51) ist damit unsymmetrisch und ermöglicht nichtreziproke Bauelemente.

Ein einfach zu verstehender nichtreziproker Effekt in einem vormagnetisierten Ferrit stellt der *Faraday*-Effekt dar. Wenn man in einem in z-Richtung vormagnetisierten Ferriten eine linear polarisierte ebene Welle ebenfalls in z-Richtung einstrahlt, wird – abhängig von der Größe des Gleichmagnetfelds – der Polarisationszustand um einen Winkel θ_F gedreht (θ_F ist die Faraday-Drehung).

Die Drehrichtung hängt dabei nur von der Richtung des Gleichmagnetfeldes und nicht von der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle ab. Wie wir gleich sehen werden, lässt sich dieser Effekt zur Realisierung eines nichtreziproken Bauelements ausnutzen.

3.1 Einwegleitungen

Das einfachste nichtreziproke Bauelement ist eine Einwegleitung mit der Streumatrix:

$$\underline{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

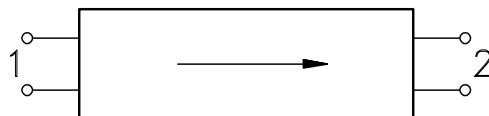


Abb. 14: Prinzip einer Einwegleitung.

¹ Man spricht auch von einem *gyotropen* Medium.

D.h. eine am Tor 1 einfallende Welle wird verlustfrei zum Tor 2 übertragen. Hingegen wird eine am Tor 2 einfallende Welle vollständig absorbiert. Abb. 14 zeigt schematisch das Grundprinzip einer solchen Einwegleitung. Viele verschiedene Realisierungsmöglichkeiten für Einwegleitungen sind möglich. Anschaulich ist die Wirkungsweise gemäß Abb. 15, die auf dem Faraday-Effekt beruht.

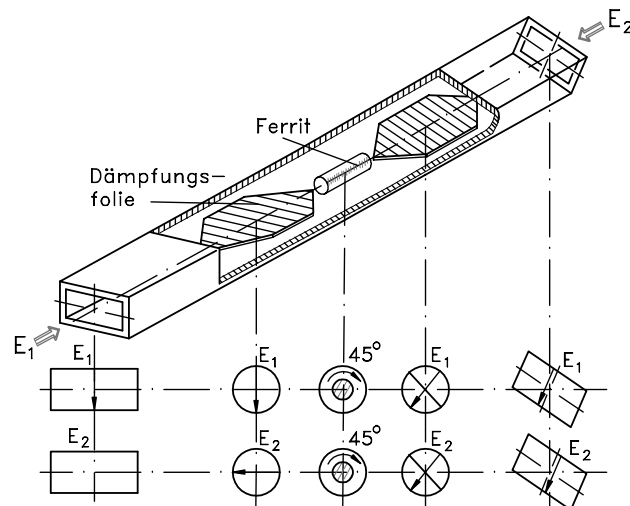


Abb. 15: Einwegleitung beruhend auf dem Faraday-Effekt.

Eine am Tor 1 einfallende Welle wird in ihrer Polarisierung entsprechend dem Faraday-Prinzip um 45° gedreht. Der Faraday-Winkel von 45° wird mit Hilfe des axialen Gleichmagnetfeldes eingestellt, so dass die Welle verlustfrei das entsprechend verdrehte Tor 2 passieren kann. Eine am Tor 2 eingekoppelte Welle jedoch wird um weitere 45° gedreht, so dass sie Tor 1 nicht passieren kann und stattdessen in der Dämpfungsfolie absorbiert wird.

3.2 Zirkulator

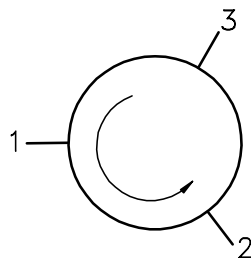


Abb. 16: Prinzip eines Zirkulators.

Das Prinzip eines Zirkulators besteht darin, dass die in Tor 1 einfallende Leistung nach Tor 2 und von Tor 2 nach 3 und von Tor 3 nach 1 übertragen wird, nicht aber in der entgegengesetzten Richtung

(s. Abb. 16). Die Streumatrix lautet damit

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Schematisch ist die Arbeitsweise eines Zirkulators in Abb. 17 am Beispiel eines Hohlleiterzirkulators dargestellt.

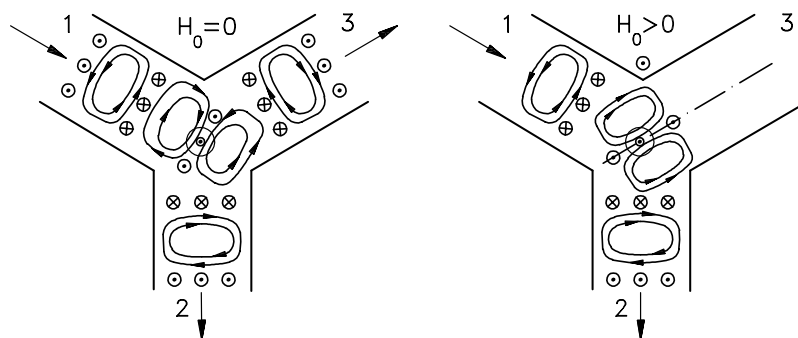


Abb. 17: Hohlleiterzirkulator ohne angelegtes Magnetfeld (links) und mit Magnetgleichfeld (rechts).

Im Zentrum einer Hohlleiterverzweigung befindet sich ein Ferrit. **Ohne angelegtes Gleichmagnetfeld** ergibt sich in Abb. 17 eine symmetrische Aufteilung der im Tor 1 eingespeisten Leistung ohne Richtwirkung. **Mit Gleichmagnetfeld** (senkrecht zur Zeichenebene) ergibt sich eine Drehung der Felder, so dass sich resultierend eine Richtwirkung vom Tor 1 zum Tor 2 ergibt. Eine Bauform für Zirkulatoren mit Streifenleitungen zeigt Abb. 18.

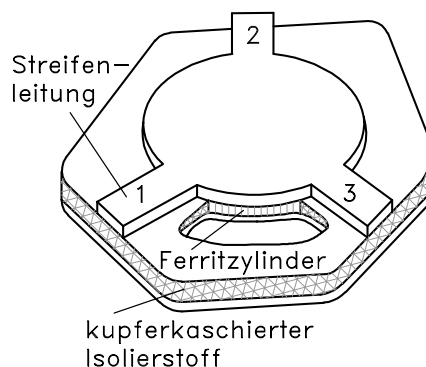


Abb. 18: Streifenzirkulator.

Zirkulatoren werden beispielsweise in Sende-/Empfangs-(Duplex)-Systemen verwendet, die einen schematischen Aufbau gemäß Abb. 19 haben

Aus Zirkulatoren lassen sich auch Einwegleitungen gewinnen, wenn ein Tor des Zirkulators reflexionsfrei abgeschlossen wird.

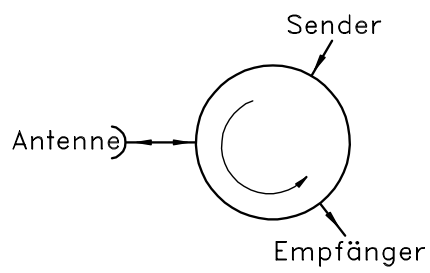


Abb. 19: Schematischer Aufbau eines Sende-/Empfangs-(Duplex)-Systems.