

1 Vorüberlegung

Bisher wurde nur die Übertragung harmonischer Signale einer bestimmten Frequenz betrachtet. Allerdings werden auch pulsartige Vorgänge mit Leitungen übertragen. Um diese Vorgänge beschreiben zu können, hat man grundsätzlich die Möglichkeit, die Pulse mittels der Fourier-Transformation in seine Spektralanteile zu zerlegen und dann die Übertragung dieser Anteile getrennt von einander zu betrachten. Schließlich müssen die übertragenen Spektralanteile wieder überlagert werden, indem man eine Fourier-Rücktransformation vornimmt. Diese allgemeine Vorgehensweise ist immer möglich, jedoch ist sie sehr aufwändig und wird insbesondere bei verlustbehafteten oder dispersiven Leitungen angewandt.

2 Pulsausbreitung auf verlustfreien, nicht dispersiven Leitungen

Wir wollen im Folgenden die Pulsausbreitung in verlustfreien und nicht dispersiven ($v_{ph} = v_{gr} = v$) Leitungen betrachten. Der Ausgangspunkt sind die bereits bekannten Leitungsgleichungen (LEI 3 und LEI 4), wobei die Komponenten, die die Verluste beschreiben, vernachlässigt werden ($R' = G' = 0$) und die Induktivitäts- und Kapazitätsbelege L' und C' frequenzunabhängig werden:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C' \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

Wenn man nun die Gl. (1) partiell nach z und Gl. (2) partiell nach t ableitet, erhält man eine Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -L' \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z}; & \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} &= -C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \text{mit } v &= \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \end{aligned} \quad (3)$$

Gl. (3) beschreibt eine allgemeine Wellengleichung, die durch folgenden Ansatz gelöst wird:

$$u(z, t) = f_h \left(t - \frac{z}{v} \right) + f_r \left(t + \frac{z}{v} \right), \quad (4)$$

bei der die beliebigen Funktionen $f_h()$ und $f_r()$ jeweils eine hin- und rücklaufende Welle beschreiben. Sie sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die Stromverteilung ergibt sich analog:

$$Z_L \cdot i(z, t) = f_h \left(t - \frac{z}{v} \right) - f_r \left(t + \frac{z}{v} \right), \quad (5)$$

2.1 Beispiel: Blitzeinschlag in eine Leitung

Durch atmosphärische Felder wird eine Ladungsverteilung $Q'(z)$ mit der Gesamtladung $Q = \int Q'(z) dz$ auf der Leitung influenziert, die nach dem Blitzeinschlag zur Zeit $t = 0$ auf der Leitung plötzlich abfließt. Es ergeben sich für Strom und Spannung zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$u(z, 0) = \frac{Q'(z) dz}{C' dz} = f(z) = \frac{Q'(z)}{C'} = f_h \left(-\frac{z}{v} \right) + f_r \left(\frac{z}{v} \right) \quad (6)$$

$$Z_L \cdot i(z, 0) = 0 = f_h \left(-\frac{z}{v} \right) - f_r \left(\frac{z}{v} \right). \quad (7)$$

Aus Gl. (7) ergibt sich sofort:

$$f_r \left(\frac{z}{v} \right) = f_h \left(-\frac{z}{v} \right) \tag{8}$$

Damit folgt dann mit Gl. (6)

$$\frac{f(z)}{2} = f_r \left(\frac{z}{v} \right) = f_h \left(-\frac{z}{v} \right) \tag{9}$$

Wenn man nun Zeiten $t > 0$ betrachtet, geht die Ortskoordinate z für die hinlaufende Welle in $z \rightarrow z - vt$ und für die rücklaufende Welle in $z \rightarrow z + vt$ über. Man kann somit schreiben:

$$u(z, t) = \frac{1}{2} [f(z - vt) + f(z + vt)] \tag{10}$$

$$i(z, t) = \frac{1}{2Z_L} [f(z - vt) - f(z + vt)] \tag{11}$$

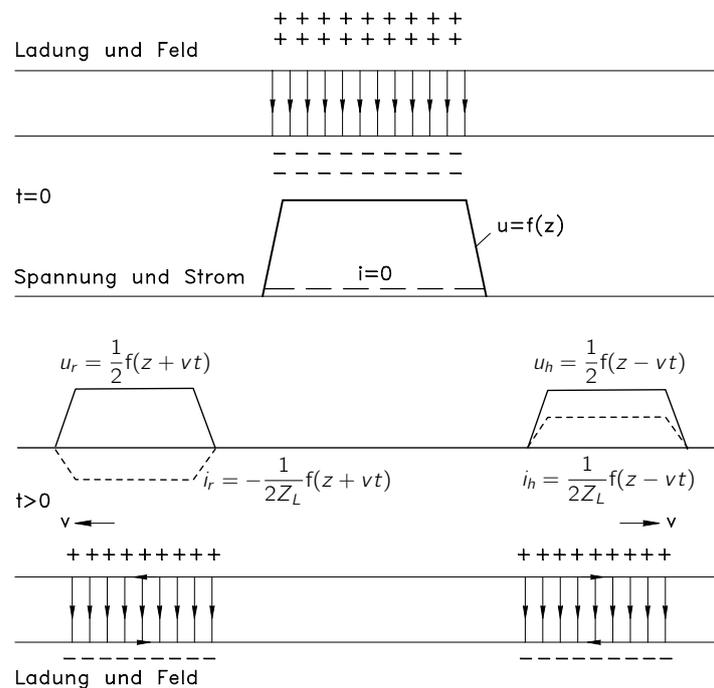


Abb. 1: Wanderwellen bei plötzlicher Entladung nach Blitzschlag.

2.2 Beispiel: Einschalten einer Leitung

Wir wollen den Fall betrachten, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Spannung U_0 auf eine Leitung geschaltet wird (siehe Abb. 2). Im ersten Moment nach dem Schließen des Schalters kann auf der Leitung nur eine hinlaufende Welle existieren. Wir können also folgenden Ansatz machen:

$$u = u_h = f_h \left(t - \frac{z}{v} \right) \tag{12}$$

$$i = i_h = \frac{1}{Z_L} f_h \left(t - \frac{z}{v} \right) \tag{13}$$

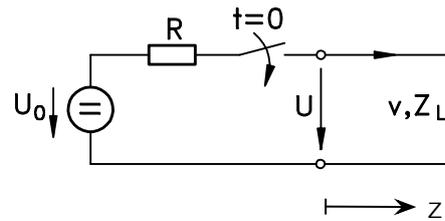


Abb. 2: Einschalten einer Leitung.

Betrachten wir nun den Ort $z = 0$, dann erhalten wir:

$$f_h(z = 0, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_0 \frac{Z_L}{R+Z_L} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

Für beliebige Orte z auf der Leitung lässt sich allgemeiner schreiben (siehe Abb. 3):

$$u(z, t) = f_h\left(t - \frac{z}{v}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } t - \frac{z}{v} < 0 \\ U_0 \frac{Z_L}{R+Z_L} & \text{für } t - \frac{z}{v} \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

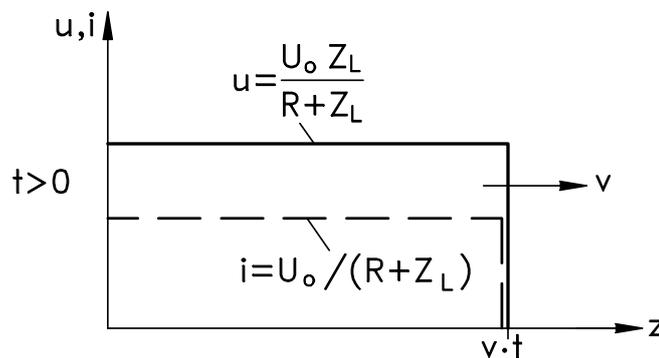


Abb. 3: Strom- und Spannungsverteilung beim Einschalten einer Leitung.

3 Einschalten einer beidseitig fehlangepassten Leitung

Wir wollen im Folgenden den Einschaltvorgang bei einer Leitung betrachten, deren beide Enden nicht reflexionsfrei angepasst sind. Dazu wird als Beispiel ein Generator mit einem Generatorinnenwiderstand von $R_i = Z_L/2$ und am Leitungsende ein Lastwiderstand $R_e = Z_L/2$ angenommen.

Zuerst wird der Reflexionsfaktor an beiden Abschlüssen berechnet:

$$r_1 = r_2 = \frac{\frac{Z_L}{2} - Z_L}{\frac{Z_L}{2} + Z_L} = -\frac{1}{3} \quad (16)$$

An beiden Enden ergeben sich somit Reflexionsfaktoren von $-\frac{1}{3}$. Die eingeschaltete Welle wird am Leitungsende reflektiert und überlagert sich mit der hinlaufenden Welle. Diese zurücklaufende Welle wird dann am Leitungsanfang auch mit einem Reflexionsfaktor von $r_1 = -\frac{1}{3}$ reflektiert. Dieser Vorgang wiederholt sich immer wieder und ist in Abb. 4 dargestellt.

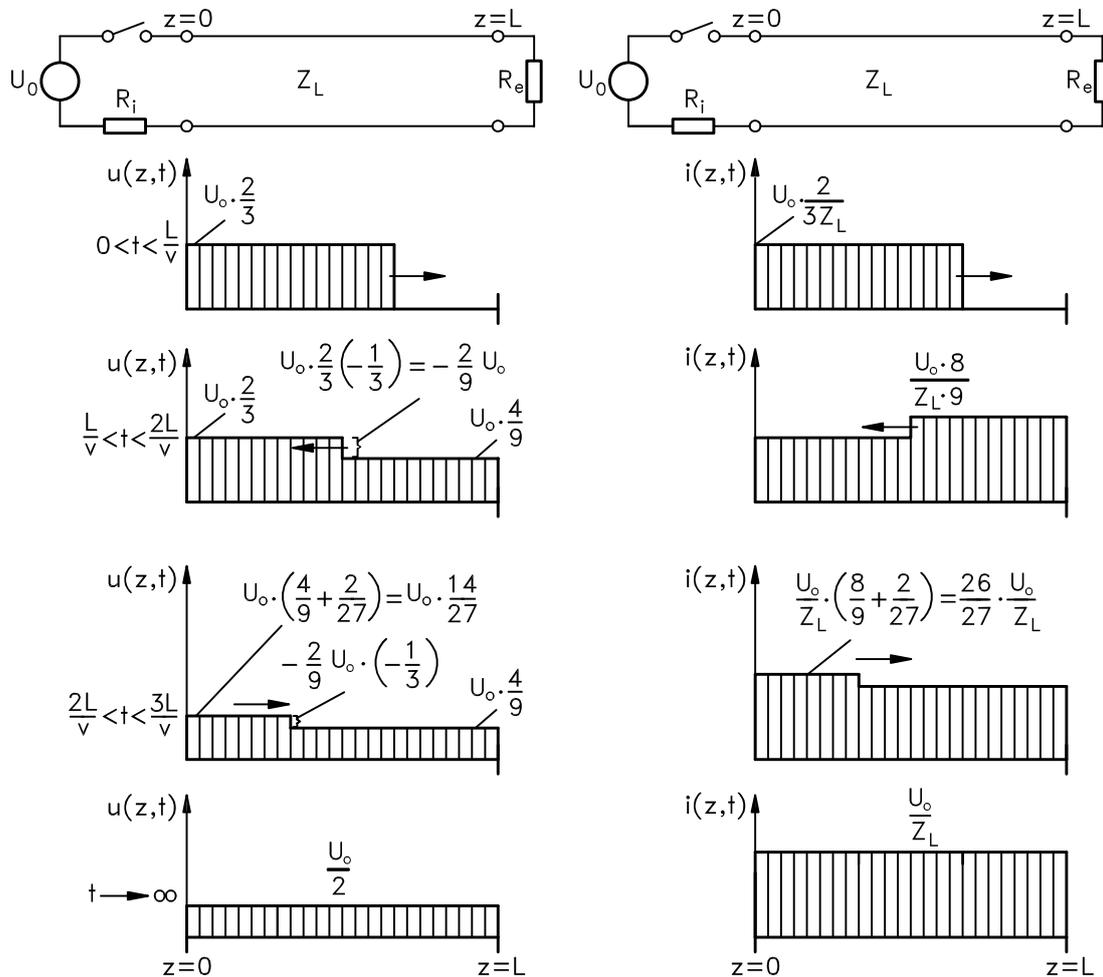


Abb. 4: Strom- und Spannungsverteilung beim Einschalten einer beidseitig fehlangepassten Leitung mit $R_i = R_e = \frac{Z_L}{2}$.

3.1 Systematische Untersuchung des Einschaltverhaltens: Bergeron-Diagramm

Der oben beschriebene Vorgang lässt sich in systematischer Art und Weise mit dem *Bergeron-Diagramm* beschreiben. Dazu betrachtet man den Leitungsanfang und das Leitungsende separat. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir uns nur auf ohm'sche Widerstände R_i und R_e beschränken. Am Leitungsanfang in Abb. 5a) ergibt sich zunächst die *Generatorkennlinie*:

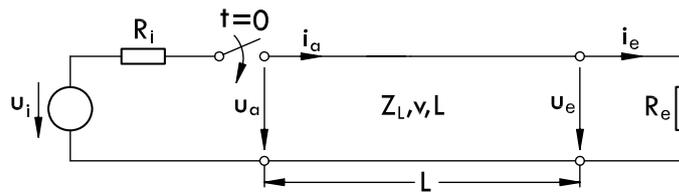
$$u_a = u_i - R_i i_a. \tag{17}$$

Die Spannung am Leitungsende beschreibt die *Lastkennlinie*:

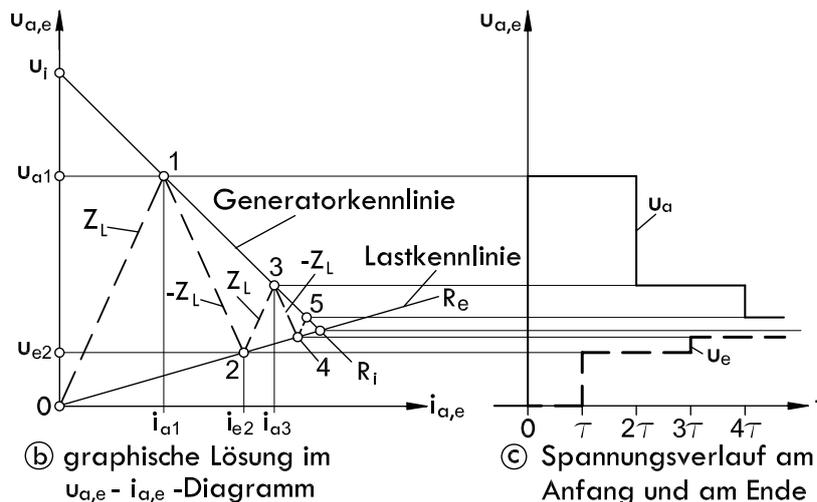
$$u_e = R_e \cdot i_e. \tag{18}$$

Die Leitung sei weiterhin charakterisiert durch die Laufzeit der Welle entlang der Leitung $\tau = \frac{L}{v}$.

Die sich ergebenden Spannungen u_a, u_e bzw. Ströme i_a, i_e am Anfang bzw. Ende der Leitung sollen nun zu verschiedenen Zeiten betrachtet werden. Der Schalter in Abb. 5a) wird zur Zeit $t = 0$ geschlossen.



Ⓐ beidseitig fehlangepasste Leitung



Ⓑ graphische Lösung im $u_{a,e} - i_{a,e}$ -Diagramm

Ⓒ Spannungsverlauf am Anfang und am Ende

Abb. 5: Beschreibung des Einschaltens einer Leitung durch das Bergeron-Diagramm.

3.2 Zeitraum 1: $0 < t < \tau$

Für diese Zeitraum bildet sich nur eine hinlaufende Welle aus (vgl. auch Abb. 4). Die Spannung u_a und der Strom i_a am Anfang werden für diesen Zeitraum 1 mit u_{a1}, i_{a1} bezeichnet, und es gilt einmal der Zusammenhang für die hinlaufende Welle

$$u_{a1} = Z_L \cdot i_{a1} \tag{19}$$

sowie auch die Generatorkennlinie (17):

$$u_{a1} = u_i - R_i \cdot i_{a1}. \tag{20}$$

Eine graphische Lösung von Gl. (19) ist einfach im Bergeron-Diagramm gemäß Abb. 5b) möglich, wo sich u_{a1} , i_{a1} als Schnittpunkt der Geraden nach Gl. (19) und (20) ergibt.

3.3 Zeitraum 2: $\tau < t < 2\tau$

Für diesen Zeitraum hat die hinlaufende Welle das Leitungsende erreicht und wird reflektiert. Die Spannung am Ende der Leitung in diesem Zeitraum $u_e = u_{e2}$ ergibt sich damit

$$u_{e2} = u_{a1} + u_{r2} \quad (21)$$

als Überlagerung der hinlaufenden Welle von Zeitraum 1 und einer neu entstehenden reflektierten Welle mit u_{r2} . Entsprechend gilt für die Ströme

$$i_{e2} = i_{a1} + i_{r2} \quad (22)$$

Für die reflektierte Welle muss gelten:

$$u_{r2} = -Z_L \cdot i_{r2} \quad (23)$$

und damit aus Gl. (21), (22)

$$(u_{e2} - u_{a1}) = -Z_L (i_{e2} - i_{a1}). \quad (24)$$

Gl. (24) beschreibt für u_{e2} , i_{e2} eine Gerade mit der Steigung $-Z_L$ durch den Punkt (u_{a1}, i_{a1}) , wie sie auch in Abb. 5b) eingezeichnet ist. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Lastkennlinie

$$u_{e2} = R_e \cdot i_{e2} \quad (25)$$

führt dann auf das gesuchte Wertepaar u_{e2} , i_{e2} .

3.4 Zeitraum 3: $2\tau < t < 3\tau$

Für $t = 2\tau$ hat die reflektierte Welle wieder den Leitungsanfang erreicht, so dass sich für den Zeitraum 3 am Anfang der Leitung wieder eine neue hinlaufende Welle ergibt. Die Spannung $u_a = u_{a3}$ und der Strom $i_a = i_{a3}$ für diesen Zeitraum 3 ergeben sich als Überlagerung von u_{e2} , i_{e2} mit dieser neuen hinlaufenden Welle (vgl. auch Abb. 4):

$$u_{a3} = u_{e2} + u_{h3} \quad (26)$$

$$i_{a3} = i_{e2} + i_{h3} \quad (27)$$

mit

$$u_{h3} = Z_L \cdot i_{h3}, \quad (28)$$

so dass sich mit Gl. (28) und (26), (27) ergibt:

$$(u_{a3} - u_{e2}) = Z_L (i_{a3} - i_{e2}). \quad (29)$$

Gl. (29) beschreibt für u_{a3} , i_{a3} eine Gerade mit der Steigung Z_L durch (u_{e2}, i_{e2}) , die auch in Abb. 5b) mit eingetragen ist. u_{a3} und i_{a3} ergeben sich dann als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Generatorkennlinie

$$u_{a3} = u_i - R_i \cdot i_{a3}. \quad (30)$$

Dieses Verhalten setzt sich entsprechend fort, bis für $t \rightarrow \infty$ der Schnittpunkt zwischen Generator- und Lastkennlinie erreicht wird.

Das sich schließlich ergebende Zeitverhalten ist in Abb. 5c) sowohl für die Spannung am Anfang der Leitung u_a als auch am Ende der Leitung u_e dargestellt.

Für ein kurzes Einschwingverhalten sollte R_i und/oder R_a nicht zu stark vom Wellenwiderstand Z_L abweichen.

3.5 Anwendung auf nichtlineare Generator- und Lastkennlinien

Das Bergeron-Diagramm ist im obigen Beispiel für sehr einfache Last- und Generatorkennlinien angewandt worden. Es lässt sich auch auf nichtlineare Generator- und Lastkennlinien übertragen, bei denen man grafisch in gleicher Weise vorgeht wie oben beschrieben. Beispiele dafür sind Eingangs- und Ausgangskennlinien von digitalen Schaltkreisen.

4 Schlussbemerkung

In diesem Kapitel wurde die Ausbreitung von Impulsen auf Leitungen betrachtet und das Bergeron-Diagramm als einfaches Hilfsmittel zur Beschreibung der Impulsausbreitung mit Reflexionen an den Leitungsenden eingeführt. Die an den Enden der Leitungen auftretenden Reflexionen können insbesondere bei sehr kurzen Pulsen, deren Breite im Bereich der Laufzeit der Leitung liegt, zu starken Störungen und fehlerhafter Übertragung führen, da in diesem Falle die Pulse nicht nur verzerren, sondern auch noch Signalanteile sich mit benachbarten Pulsen überlagern können. Um diese Störungen zu vermeiden, sollte die Signalquelle und/oder die Last möglichst reflexionsfrei abgeschlossen werden.