

## 1 Vorbetrachtung: Linearität und Zeitinvarianz

Hochfrequente Signale sollen mit Hilfe von elektronischen Schaltungen verstärkt werden. Für die kompakte Beschreibung der Signale in solchen Schaltungen eignen sich lineare, zeitinvariante Netzwerke. Wir wollen zunächst die Eigenschaften der Linearität und der Zeitinvarianz betrachten und die sich daraus ergebenden Konsequenzen beleuchten.



Abb. 1: Allgemeine Darstellung eines Zweitors.

Allgemein lässt sich eine Schaltung als ein Zweitor annehmen, in das die Eingangsgröße  $a(t)$  hineingeht und aus dem die Ausgangsgröße  $b(t)$  herauskommt:

$$a(t) \implies b(t) \quad (1)$$

Ein Netzwerk ist **linear**, wenn für beliebige  $a_1(t)$  und  $b_1(t)$  aus

$$a_1(t) \implies b_1(t)$$

$$a_2(t) \implies b_2(t)$$

folgt, dass

$$(c_1 \cdot a_1(t) \pm c_2 \cdot a_2(t)) \implies (c_1 \cdot b_1(t) \pm c_2 \cdot b_2(t)) \quad (2)$$

mit beliebigen Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ .

Ein lineares System kann dann angenommen werden, wenn  $a_1(t)$  und  $b_1(t)$  genügend klein sind und die Übertragungskennlinie des Systems um den Arbeitspunkt herum linearisiert werden kann (Kleinsignalverstärkung).

Es werden zunächst nur **zeitinvariante** Netzwerke betrachte, d. h. aus

$$a(t) \implies b(t)$$

folgt dann

$$a(t - \tau) \implies b(t - \tau) \quad (3)$$

Mit Gl. (2) und (3) gilt ebenfalls, dass aus

$$a(t) \implies b(t)$$

auch

$$\tau \frac{da(t)}{dt} \implies \tau \frac{db(t)}{dt} \quad (4)$$

folgt.

Gl. (4) ist sofort ersichtlich aus folgendem Zusammenhang:

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{a(t+dt) - a(t)}{dt} \implies \frac{b(t+dt) - b(t)}{dt} = \frac{db(t)}{dt} \quad (5)$$

Wenn wir als Eingangsgröße ein harmonisches Signal mit  $a(t) = \Re(A \exp(j\omega t))$  annehmen, folgt daraus:

$$a(t) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} \implies b(t) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 b(t)}{dt^2} \quad (6)$$

Die Differentialgleichung für  $b(t)$  führt damit wieder auf ein harmonisches Signal

$$b(t) = \Re(\underline{B} \exp(j\omega t)), \quad (7)$$

weshalb sich eine Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  im Frequenzbereich definieren lässt

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} \quad (8)$$

und die Übertragungseigenschaften eines linearen, zeitinvarianten Netzwerkes im Frequenzbereich mit Hilfe der Fourieranalyse betrachtet werden können:

$$\begin{aligned} a(t) & \circ \text{---} \bullet \underline{A}(j\omega) \\ b(t) & \circ \text{---} \bullet \underline{B}(j\omega) \end{aligned}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich somit

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)} \quad (9)$$

## 2 Zweitor- und Vierpoldarstellung

Bisher wurden allgemeine Eingangs- und Ausgangsgrößen betrachtet. Nun wollen wir an Ein- und Ausgang Spannungen und Ströme annehmen.

Ströme  $I$  und Spannungen  $U$  setzen sich im Allgemeinen zusammen aus einem Gleich- und einem Wechselanteil:

$$I(t) = I_0 + i(t) \quad (10)$$

$$U(t) = U_0 + u(t) \quad (11)$$

Solange  $i(t)$  und  $u(t)$  genügend klein sind, kann man einen linearen Zusammenhang zwischen beiden Größen annehmen (Linearisierung der Kennlinie um den Arbeitspunkt  $U_0, I_0$ ).

Da wir im Folgenden nur die Wechselanteile betrachten wollen, beschreiben wir diese Größen mit den komplexen Zeigern  $\underline{I}$  und  $\underline{U}$  wie in Abb. 2.

Harmonische Signale lassen sich direkt mit komplexen Zeigern beschreiben. Bei allgemeiner Zeitabhängigkeit entsprechen die Zeiger den Fouriertransformierten von Strom und Spannung. Für die Beschreibung eines Zweitores mit Zeigern gibt es verschiedene Darstellungsformen, von denen einige im Folgenden vorgestellt werden sollen.

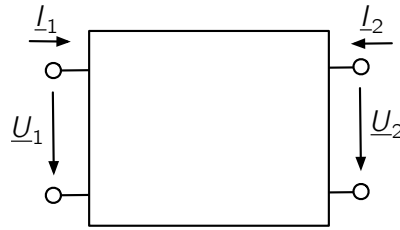


Abb. 2: Beschreibung der Ein- und Ausgangsspannungen/-strömen mit komplexen Zeigern.

## 2.1 y-Parameter

Eine gängige Darstellungsform von Zweitoren sind die y-Parameter, bei denen die Ströme über eine Leitwertmatrix mit den Spannungen verknüpft werden:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 &= y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Da bei einem Verstärker Ein- und Ausgang nicht vertauschbar sind, gilt  $y_{12} \neq y_{21}$ . Der Verstärker ist also nicht reziprok.

Für einen guten Verstärker ist Folgendes erwünscht:

- geringe Rückkopplung, also  $y_{12}$  klein
- hohe Verstärkung, also  $y_{21}$  groß:  $|y_{21}| \gg |y_{12}|$

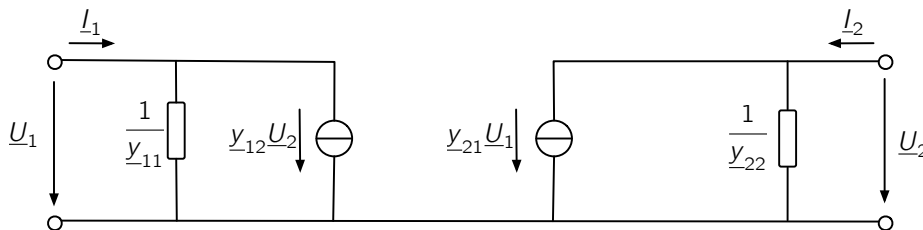
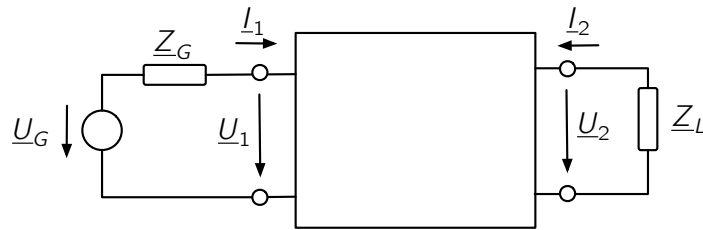


Abb. 3: Ersatzschaltbild für y-Parameter-Darstellung.

Die Leitwertmatrix in Gl. (12) lässt sich durch ein Ersatzschaltbild gemäß Abb. 3 darstellen, wobei sich die vier y-Parameter durch zwei einfache Messungen bestimmen lassen:

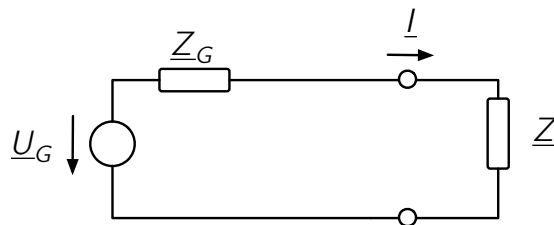
**Kurzschluss am Ausgang:** Es ergibt sich  $U_2 = 0$ , wodurch der Leitwert  $y_{22}$  kurzgeschlossen wird und die Rückwirkung  $y_{12}$  unterdrückt wird. Das erlaubt die Bestimmung von  $y_{11}$  und  $y_{21}$ .

**Kurzschluss am Eingang:** Es ergibt sich  $U_1 = 0$ , wodurch der Leitwert  $y_{11}$  kurzgeschlossen wird und die Verstärkung  $y_{21}$  unterdrückt wird. Das erlaubt die Bestimmung von  $y_{12}$  und  $y_{22}$ .

Abb. 4: Beschaltung des Verstärkers mit Lastwiderstand  $\underline{Z}_L$ .

### 2.1.1 Größe der Verstärkung

Gegeben sei ein Aufbau gemäß Abb. 4. Wir wollen die Größe der Verstärkung des Zweitores beschreiben. Dazu betrachten wir zunächst gemäß Abb. 5 die Wirkleistung, die von einem Generator an einen Lastwiderstand  $\underline{Z}$  abgegeben wird.

Abb. 5: Lastwiderstand  $\underline{Z}$  an einem Generator mit Innenwiderstand  $\underline{Z}_G$ .

Die aufgenommene Wirkleistung in  $\underline{Z}$   $P_E$  ergibt sich dann über die anteilig am Lastwiderstand  $\underline{Z}$  abfallende Spannung und den Strom, der durch Generator- und Lastimpedanz  $\underline{Z}_G$  bzw.  $\underline{Z}$  hindurchfließt:

$$P_E = \frac{1}{2} \Re \left( \underline{U}_G \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_G} \cdot \underline{I}^* \right) \quad \text{mit} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_G}{\underline{Z} + \underline{Z}_G}$$

$$P_E = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{|\underline{U}_G|^2 \underline{Z}}{|\underline{Z} + \underline{Z}_G|^2} \right) = \frac{|\underline{U}_G|^2}{2 \cdot |\underline{Z} + \underline{Z}_G|^2} \Re(\underline{Z}) \quad (13)$$

Die aufgenommene Wirkleistung  $P_E$  wird maximal für  $\underline{Z} = \underline{Z}^*$ . Man spricht dann von **Leistungsanpassung**. Im Falle der Leistungsanpassung kann man die **maximal verfügbare Wirkleistung** des Generators  $P_{Gm}$  definieren:

$$P_{Gm} = \frac{|\underline{U}_G|^2}{8 \Re(\underline{Z}_G)} \quad (14)$$

Wir wollen nun die Leistung am Ausgang des Verstärkers betrachten. Wir führen dazu  $P_A$  und  $P_{Am}$  mit den folgenden Definitionen ein:

- $P_A$  – die an die Lastimpedanz  $\underline{Z}_L$  abgegebene Wirkleistung (nach Verstärkung)
- $P_{Am}$  – die maximal abgegebene Wirkleistung (bei Leistungsanpassung am Ausgang des Verstärkers)

Mit diesen Definitionen lassen sich folgende Verstärkungen beschreiben:

$$G = \frac{P_A}{P_{Gm}} \quad (\text{Übertragungsleistungsverstärkung}) \quad (15)$$

$$G_m = \frac{P_{Am}}{P_{Gm}} \quad (\text{verfügbare Leistungsverstärkung bei Anpassung am Ausgang}) \quad (16)$$

$$G'_m = \frac{P_{Am}}{P_E} \quad \text{für } P_E = P_{Gm} \quad (\text{max. Leistungsverst. bei Anpassung an Ein- und Ausgang}) \quad (17)$$

wobei gilt:

$$G'_m > G_m > G \quad (18)$$

**Für einen rückwirkungsfreien Vierpol** ( $y_{12} = 0$ ) gilt bei Leistungsanpassung an Ein- und Ausgang:

$$G = G'_m = \frac{|y_{21}|^2}{4\Re(y_{11})\Re(y_{22})} \quad (19)$$

## 2.2 h-Parameter

Eine andere Darstellungsform für Vierpole sind die Hybrid-Parameter (h-Parameter), bei denen die Eingangsspannung  $\underline{U}_1$  und der Ausgangsstrom  $\underline{I}_2$  über Hybridparameter (in Form von Leitwerten und Impedanzen) mit dem Eingangsstrom  $\underline{I}_1$  und der Ausgangsspannung  $\underline{U}_2$  verknüpft werden:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= h_{11}\underline{I}_1 + h_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= h_{21}\underline{I}_1 + h_{22}\underline{U}_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Das dazu gehörende Ersatzschaltbild ist in Abb. 6 dargestellt.

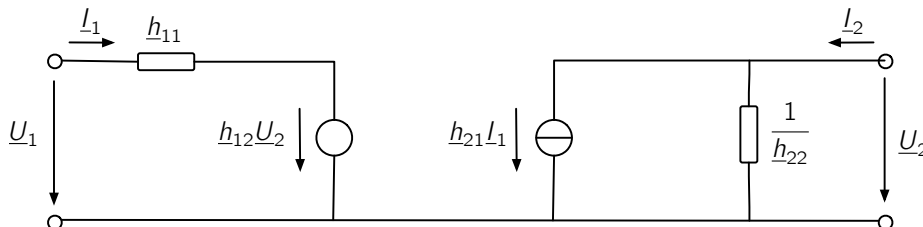


Abb. 6: Ersatzschaltbild für h-Parameter-Darstellung.

Die Hybrid-Parameter-Darstellung wird bevorzugt bei niedrigeren Frequenzen verwendet, da bei höheren Frequenzen die beiden Parameter  $h_{12}$  und  $h_{22}$  schlecht messbar sind. Der Leerlauf am Eingang ( $\underline{I}_1 = 0$ ) für die messtechnische Bestimmung der Parameter ist schlecht realisierbar.

## 2.3 S-Parameter

Abb 7 zeigt die Darstellung eines Zweitors mit Streu-Parametern (S-Parameter). Die Eingangs- und Ausgangsgrößen werden hier nicht – wie bei y- und h-Parametern – mittels Spannung und Strom beschrieben, sondern in Form von normierten hinein- und herauslaufenden Wellenamplituden  $\underline{a}$  bzw.  $\underline{b}$ . Diese normierten Wellenamplituden können unter Annahme einer Leitung mit Wellenwiderstand  $Z_L$

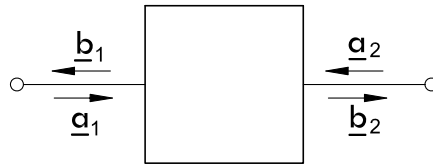


Abb. 7: Vierpolbeschreibung mit S-Parametern.

mit Spannungen und Ströme verknüpft werden:

$$\underline{a} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{Z_L} \cdot \underline{I} + \frac{1}{\sqrt{Z_L}} \cdot \underline{U} \right) \quad (21)$$

$$\underline{b} = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{Z_L} \cdot \underline{I} + \frac{1}{\sqrt{Z_L}} \cdot \underline{U} \right) \quad (22)$$

Die herauslaufenden Wellenamplituden an Ein- und Ausgang werden über eine Streumatrix mit den hineinlaufenden Wellenamplituden verknüpft:

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= \underline{S}_{11}\underline{a}_1 + \underline{S}_{12}\underline{a}_2 \\ \underline{b}_2 &= \underline{S}_{21}\underline{a}_1 + \underline{S}_{22}\underline{a}_2 \end{aligned} \quad (23)$$

Die Bestimmung der einzelnen Streuparameter ist möglich mittels Messung der Wellenamplituden über einen Richtkoppler, wie Abb. 8 zeigt.

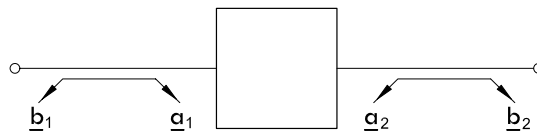


Abb. 8: Messung der Wellenamplituden mit Richtkopplern.

S-Parameter werden im Allgemeinen bei sehr hohen Frequenzen verwendet (typischerweise  $f \geq 1$  GHz).

## 2.4 Maximale Leistungsverstärkung

Die maximale Leistungsverstärkung  $G'_m$ , wie in Gl. (17) definiert, lässt sich auch durch S-Parameter ausdrücken. Unter der Annahme einer rückwirkungsfreien Vierpols ( $\underline{S}_{12} = 0$ ) ergibt sich:

$$G'_m = \frac{|\underline{S}_{21}|^2}{(1 - |\underline{S}_{11}|^2)(1 - |\underline{S}_{22}|^2)} \quad (24)$$

Diese Verstärkung lässt sich durch verlustfreie Anpassungsnetzwerke an Ein- und Ausgang erreichen, so dass die Reflexionen ein- und ausgangseitig verschwinden.

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen  $y$ -,  $h$ - und  $S$ -Parametern – folgende Abkürzungen werden verwendet:  $\Delta_d = \underline{d}_{11}\underline{d}_{22} - \underline{d}_{12}\underline{d}_{21}$ , sowie  $\underline{S}' = 1 + Z_L(\underline{y}_{11} + \underline{y}_{22} + \Delta_y \cdot Z_L)$  und  $\underline{Z}' = Z_L(1 + \underline{S}_{11} + \underline{S}_{22} - \Delta_S)$

	$\underline{y}$	$\underline{h}$	$\underline{S}$
$\underline{y}_{11}$		$1/\underline{h}_{11}$	$(1 - \underline{S}_{11} + \underline{S}_{22} - \Delta_S)/\underline{Z}'$
$\underline{y}_{12}$		$-\underline{h}_{12}/\underline{h}_{11}$	$-2\underline{S}_{12}/\underline{Z}'$
$\underline{y}_{21}$		$\underline{h}_{21}/\underline{h}_{11}$	$-2\underline{S}_{21}/\underline{Z}'$
$\underline{y}_{22}$		$\Delta_S/\underline{h}_{11}$	$(1 + \underline{S}_{11} - \underline{S}_{22} - \Delta_S)/\underline{Z}'$
$\underline{h}_{11}$	$1/\underline{y}_{11}$		
$\underline{h}_{11}$	$-\underline{y}_{12}/\underline{y}_{11}$		
$\underline{h}_{11}$	$\underline{y}_{21}/\underline{y}_{11}$		
$\underline{h}_{11}$	$\Delta_y/\underline{y}_{11}$		
$\underline{S}_{11}$	$(1 - \underline{y}_{11} \cdot Z_L + \underline{y}_{22} \cdot Z_L - \Delta_y \cdot Z_L^2)/\underline{S}'$		
$\underline{S}_{12}$	$-2\underline{y}_{12} \cdot Z_L/\underline{S}'$		
$\underline{S}_{21}$	$-2\underline{y}_{21} \cdot Z_L/\underline{S}'$		
$\underline{S}_{22}$	$(1 + \underline{y}_{11} \cdot Z_L - \underline{y}_{22} \cdot Z_L - \Delta_y \cdot Z_L^2)/\underline{S}'$		