

1 Vorbetrachtung

Problem: Eine Gleichspannungsquelle U_0 soll über einen Schalter S an einen reellen Lastwiderstand R angeschlossen werden. Dieser ist mit einer Leitung der Länge L mit der Spannungsquelle verbunden.

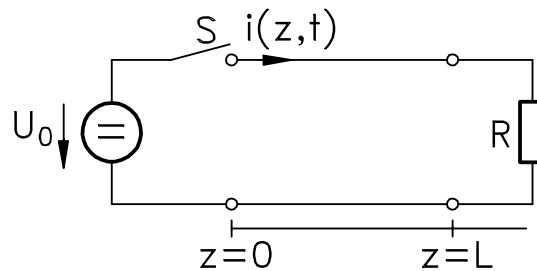


Abb. 1: Einschaltvorgang bei einer Leitung der Länge L und einem reellen Abschlusswiderstand R .

Der Schalter S wird zur Zeit $t = 0$ geschlossen. Wie groß ist der Strom $I(t = 0)$ an der Stelle $z = 0$ unmittelbar nach Schließen des Schalters S ?

Da der Strom zu diesem Zeitpunkt vom Widerstand R noch nichts merkt, hängt die Größe dieses Stromes offenbar nur von der Leitung ab und wird nicht durch den Widerstand am Ende der Leitung beeinflusst. Man muss daher den Einfluss der Leitung beschreiben.

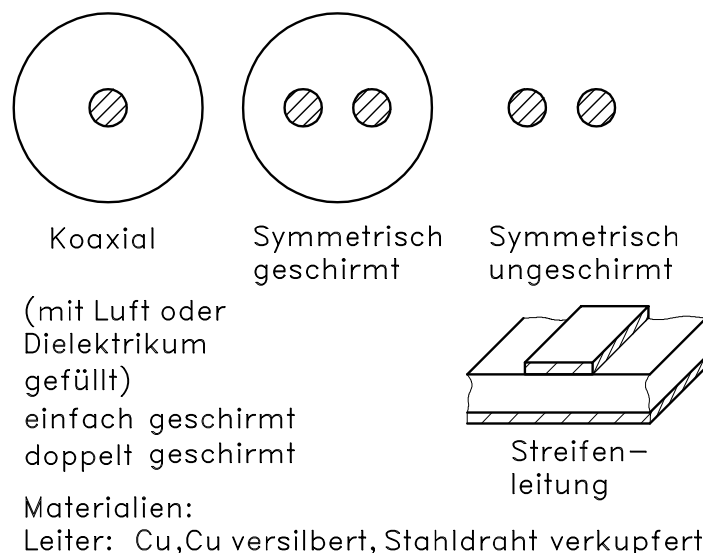


Abb. 2: Konstruktive Auslegung gängiger Leitungen.

Tabelle 1: Isoliermaterialien

	Luft	Polyethylen	Teflon	Polyvinylchlorid (PVC)	Nylon
ϵ_r	1	2,28	2,1	4-5	3,5

1.1 Leitungsstrukturen

In Abb. 2 sind unterschiedliche Leitungsstrukturen dargestellt. Leitungen findet man damit in Nachrichtenkabeln, aber z.B. auch bei Leiterplatten oder auf Computerchips.

2 Herleitung der Leitungsgleichungen

Zunächst betrachten wir in Abb. 3 ein Leitungsstück der infinitesimalen Länge dz : Die an der Leitung liegende Spannung $u(z)$ führt im Abschnitt dz zu einer gespeicherten Ladung dQ (Kapazität). Der fließende Strom $i(z)$ führt im Abschnitt dz zu einem magnetischen Fluss $d\Phi$ (Induktivität).

Mit diesen Betrachtungen lässt sich für den Leitungsabschnitt dz ein Ersatzschaltbild nach Abb. 3 herleiten. Hierbei gelten folgende Bezeichnungen:

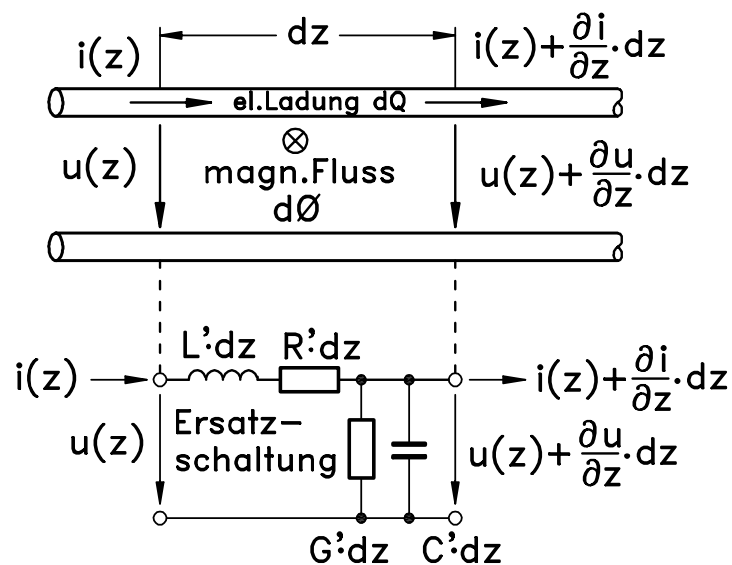


Abb. 3: Leitungsersatzschaltbild für einen infinitesimal kleinen Leitungsabschnitt dz .

L' Induktivitätsbelag mit der Dimension *Induktivität pro Länge*: $L' dz = \frac{d\Phi}{i(z)}$.

C' Kapazitätsbelag mit der Dimension *Kapazität pro Länge*: $C' dz = \frac{dQ}{u(z)}$.

R' Widerstandsbelag mit der Dimension *Widerstand pro Länge*. Er berücksichtigt die Ohm'schen Verluste der Leitung.

G' Leitwertsbelag mit der Dimension *Leitwert pro Länge*. Er berücksichtigt die dielektrischen Verluste der Leitung.

Aus Abb. 3 lassen sich die folgenden Beziehungen für Spannung und Strom ableiten:

$$u(z + dz) = u(z) + \frac{\partial u}{\partial z} dz = u(z) - L' dz \frac{\partial i}{\partial t} - R' dz \cdot i(z) \quad (1)$$

$$i(z + dz) = i(z) + \frac{\partial i}{\partial z} dz = i(z) - C' dz \frac{\partial u}{\partial t} - G' dz \cdot u(z) \quad (2)$$

Aus Gl. (1) und (2) folgen die Leitungsgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -R' \cdot i(z) - L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -G' \cdot u(z) - C' \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

2.1 Herleitung der Wellengleichung

Die Gleichungen (1) bis (4) gelten für allgemeine zeit- und ortsabhängige Signale. Für die weitere Betrachtung ist es jedoch zunächst einfacher, eine harmonische Zeitabhängigkeit anzunehmen. So ergibt sich

$$u(z, t) = \hat{U}(z) \cos(\omega t + \phi(z)) = \Re\{\underline{U}(z) \cdot \exp(j\omega t)\} \quad (5)$$

mit einem ortsabhängigen Zeiger $\underline{U}(z) = \hat{U}(z) \cdot \exp(j\phi(z))$, wobei $\hat{U}(z)$ die ortsabhängige Spannungsamplitude und $\phi(z)$ die Phase darstellen.

Die Ableitung nach der Zeit berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega \hat{U}(z) \cdot \sin(\omega t + \phi(z)) = \Re\{j\omega \underline{U}(z) \cdot \exp(j\omega t)\} \quad (6)$$

beziehungsweise in Zeigerdarstellung:

$$\begin{array}{l} u(z, t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(z); \quad i(z, t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{I}(z) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad j\omega \cdot \underline{U}(z); \quad \frac{\partial i}{\partial t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad j\omega \cdot \underline{I}(z) \end{array}$$

Aus den Leitungsgleichungen Gl. (3), (4) folgt dann:

$$\frac{d\underline{U}}{dz} = -\underline{I}(z) \cdot (R' + j\omega L') \quad (7)$$

$$\frac{d\underline{I}}{dz} = -\underline{U}(z) \cdot (G' + j\omega C') \quad (8)$$

Gl. (7) wird nach z differenziert, und der Ausdruck $\frac{d\underline{I}}{dz}$ wird dann mit Gl. (8) ersetzt:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} = -(R' + j\omega L') \frac{d\underline{I}}{dz} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \underline{U} \quad (9)$$

beziehungsweise

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} = \underline{\gamma}^2 \cdot \underline{U} \quad \text{mit} \quad \underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (10)$$

mit der *Ausbreitungskonstanten* $\underline{\gamma}$.

2.2 Wellenausbreitung auf Leitungen

Die obige Gl. (10) stellt die *Wellengleichung* dar mit den zwei folgenden Lösungen:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_1 \exp(-\underline{\gamma} \cdot z); \quad \underline{U}_r = \underline{U}_2 \exp(\underline{\gamma} \cdot z) \quad (11)$$

Wie wir später noch sehen werden, beschreiben die beiden Lösungen in (11) jeweils die hin- bzw. rücklaufende Welle. \underline{U}_1 und \underline{U}_2 stellen die Spannungszeiger der hin- und der rücklaufenden Welle auf der Leitung an der Stelle $z = 0$ dar. Die allgemeine Lösung ist die Überlagerung beider Wellen:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h(z) + \underline{U}_r(z) \quad (12)$$

Daraus lässt sich mit Gl. (7) der Stromverlauf $\underline{I}(z)$ bestimmen:

$$\underline{I}(z) = \underbrace{\frac{\underline{\gamma}}{R' + j\omega L'}}_{\frac{1}{\underline{Z}_L}} (\underline{U}_1 \exp(-\underline{\gamma}z) - \underline{U}_2 \exp(+\underline{\gamma}z)) \quad (13)$$

oder in Kurzschreibweise:

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_h(z) + \underline{I}_r(z) = \frac{\underline{U}_h(z)}{\underline{Z}_L} - \frac{\underline{U}_r(z)}{\underline{Z}_L}. \quad (14)$$

Hier steht \underline{Z}_L für den *Leitungswellenwiderstand* mit

$$\underline{Z}_L = \frac{R' + j\omega L'}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}. \quad (15)$$

Die Ausbreitungskonstante lässt sich in Realteil und Imaginärteil aufteilen

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta,$$

wobei der Realteil α die *Dämpfungskonstante* und der Imaginärteil β die *Phasenkonstante* darstellen. Für die hinlaufende Welle ergibt sich dann z.B.:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_1 \exp(-\underline{\gamma}z) = \underline{U}_1 \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z), \quad (16)$$

wobei $\exp(-\alpha z)$ die Dämpfung, und $\exp(-j\beta z)$ die Phasendrehung beschreiben.

Das Argument der ersten Exponentialfunktion ergibt sich folgendermaßen:

$$\alpha \cdot z = -\ln \left(\frac{|\underline{U}(z)|}{|\underline{U}(0)|} \right) \quad (17)$$

Die Dimension der Dämpfungskonstante α ist gegeben als $\left[\frac{Np}{m} \right]$ (Neper pro Meter).

Häufig wird das *Dämpfungsmaß* α' in $\left[\frac{dB}{m} \right]$ angegeben. Es wird folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \alpha' \cdot z &= -20 \cdot \lg \left(\frac{|\underline{U}(z)|}{|\underline{U}(0)|} \right) \text{ dB} \\ \Rightarrow \alpha' \left[\frac{dB}{m} \right] &= \left(\frac{20}{\ln(10)} \right) \alpha \left[\frac{Np}{m} \right] = 8,69 \cdot \alpha \left[\frac{Np}{m} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

3 Verlustarme Kabel

Verlustarme Kabel weisen sehr geringe ohm'sche Verluste auf, so dass $R' \ll \omega L'$ und $G' \ll \omega C'$ gelten. Damit kann man für den Wellenwiderstand Z_L aus Gleichung (15) folgende Vereinfachung einführen:

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (19)$$

Man beachte, dass der Wellenwiderstand unter diesen Bedingungen reell wird. Die Ausbreitungskonstante ergibt sich dann mit Gl. (10) näherungsweise:

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L'C'} \sqrt{\left(1 + \frac{R'}{j\omega L'}\right) \left(1 + \frac{G'}{j\omega C'}\right)} \approx j\omega\sqrt{L'C'} \left(1 + \frac{R'}{2j\omega L'} + \frac{G'}{2j\omega C'}\right)$$

Mit $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ heißt das für die Dämpfungs- und Phasenkonstante:

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{R'}{2 \cdot Z_L} + \frac{G' \cdot Z_L}{2} \quad (20)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} \quad (21)$$

4 Anwendung auf eine Koaxialleitung

Als Beispiel für eine Leitung wird ein Koaxialkabel betrachtet. Der schematische Aufbau einer solchen

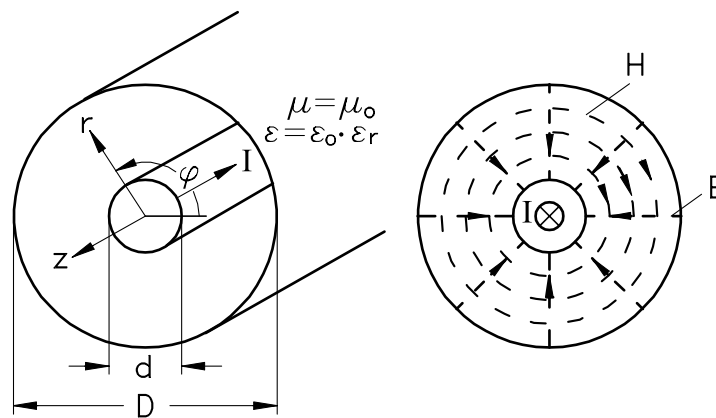


Abb. 4: Schematischer Aufbau (links) und Feldverteilungen (rechts) in einer Koaxialleitung.

Koaxialleitung ist in Abb. 4 dargestellt. Hierbei hat der Innenleiter den Durchmesser d , der Außenleiter den Durchmesser D .

Auf Grund des *Skin-Effekts* fließt der Strom nur an der Oberfläche des Innen- bzw. Außenleiters. Daher bilden sich das elektrische und magnetische Feld im Wesentlichen nur im Dielektrikum mit $\mu = \mu_0$ und $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ aus.

Das magnetische Feld hat nur eine ϕ -Komponente H_ϕ :

$$H_\phi = -\frac{I}{2\pi r} \quad (22)$$

Das elektrische Feld besitzt nur eine radiale Komponente E_r :

$$E_r = -\frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad \text{wegen} \quad \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} -E_r \, dr = U \quad (23)$$

Da \vec{E} und \vec{H} nur in der transversalen Ebene (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung) liegen, bezeichnet man die Welle als *TEM-Welle* (transversal elektromagnetisch).

Der **Induktivitätsbelag** $L' \, dz = \frac{d\Phi}{I}$ errechnet sich folgendermaßen:

$$d\Phi = dz \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \mu_0 (-H_\phi) \, dr = dz \cdot \mu_0 \ln\left(\frac{D}{d}\right) \frac{I}{2\pi} \quad (24)$$

$$\Rightarrow L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \quad (25)$$

Der **Kapazitätsbelag** $C' \, dz = \frac{dQ}{U}$ errechnet sich folgendermaßen:

$$dQ = -dz \cdot 2\pi \frac{D}{2} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r E_r \left(r = \frac{D}{2}\right) = dz \cdot 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{U}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$

$$\Rightarrow C' = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad (26)$$

Der **Widerstandsbelag** R' setzt sich aus den Widerständen am Innen- und Außenleiter zusammen. Diese Widerstände berechnen sich mit der spezifischen Leitfähigkeit σ und der Skin-Eindringtiefe z_0 :

$$z_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

Als Zahlenwertgleichung ergibt sich beispielsweise für Kupfer (Cu): $z_{0,Cu} \approx 2,1 \frac{\mu m}{\sqrt{f/\text{GHz}}}$.

$$\Rightarrow R' = \frac{1}{\sigma z_0} \left(\frac{1}{\pi D} + \frac{1}{\pi d} \right) \quad \text{Voraussetzung: } z_0 \ll d \quad (27)$$

Der Ausdruck $(\sigma \cdot z_0)^{-1}$ wird gelegentlich auch als Wandwiderstand $R_W = (\sigma \cdot z_0)^{-1}$ bezeichnet. Für Kupfer ergibt sich $R_W \approx 8,3 \cdot 10^{-3} \Omega \sqrt{f/\text{GHz}}$.

Der **Leitwertsbelag** G' ergibt sich auf Grund der dielektrischen Verluste im Isolator:

$$G' = \omega C' \cdot \tan \delta \quad (28)$$

Mit Kenntnis dieser Werte lässt sich der **Leitungswellenwiderstand** Z_L berechnen:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}_{120\pi \, \Omega} \frac{1}{2\pi \sqrt{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{60 \, \Omega \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right)}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Für Polyethylen ($\epsilon_r = 2,28$) und einem Verhältnis zwischen Außen- zu Innenleiter von $\frac{D}{d} = 3,6$ erhält man einen Leitungswellenwiderstand von $Z_L \approx 50 \Omega$.

Die **Phasenkonstante** $\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ lässt sich wegen $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ durch die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c_0 ausdrücken:

$$\beta = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} \quad (29)$$

Dieser Zusammenhang gilt allgemein bei TEM-Wellen.

Anmerkung: Mit Gl. (29) folgt allgemein aus den Gleichungen (19) und (20):

$$L' = \frac{Z_L\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} \approx 250 \frac{\text{nH}}{\text{m}} \quad (30)$$

$$C' = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_L \cdot c_0} \approx 100 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \quad (31)$$

Die Zahlenwerte gelten für $\epsilon_r = 2,28$ und $Z_L = 50 \Omega$.

Die **Dämpfungskonstante** α ergibt sich unter den obigen Annahmen verlustarmer Kabel entsprechend Gl. (20) zu:

$$\alpha = \underbrace{\frac{1}{2\sigma \cdot z_0 \cdot Z_L} \left(\frac{1}{\pi D} + \frac{1}{\pi d} \right)}_{\text{ohm'sche Verluste: } \propto \sqrt{\omega}} + \underbrace{\frac{\beta}{2} \cdot \tan \delta}_{\text{dielektrische Verluste: } \propto \omega} \quad (32)$$

Ohm'sche Verluste sind umso kleiner, je größer die Durchmesser von Innen- und Außenleiter sind. Die minimale Dämpfung bei gegebenem Außendurchmesser $D = \text{const}$ wird erreicht für $\frac{D}{d} = 3,6$. Im Gegensatz zu den ohm'schen Verlusten hängen die dielektrischen Verluste nicht von der Wellenleitergeometrie ab.

Abb. 5 zeigt konkrete Beispiele für die Dämpfung von Koaxialkabeln.

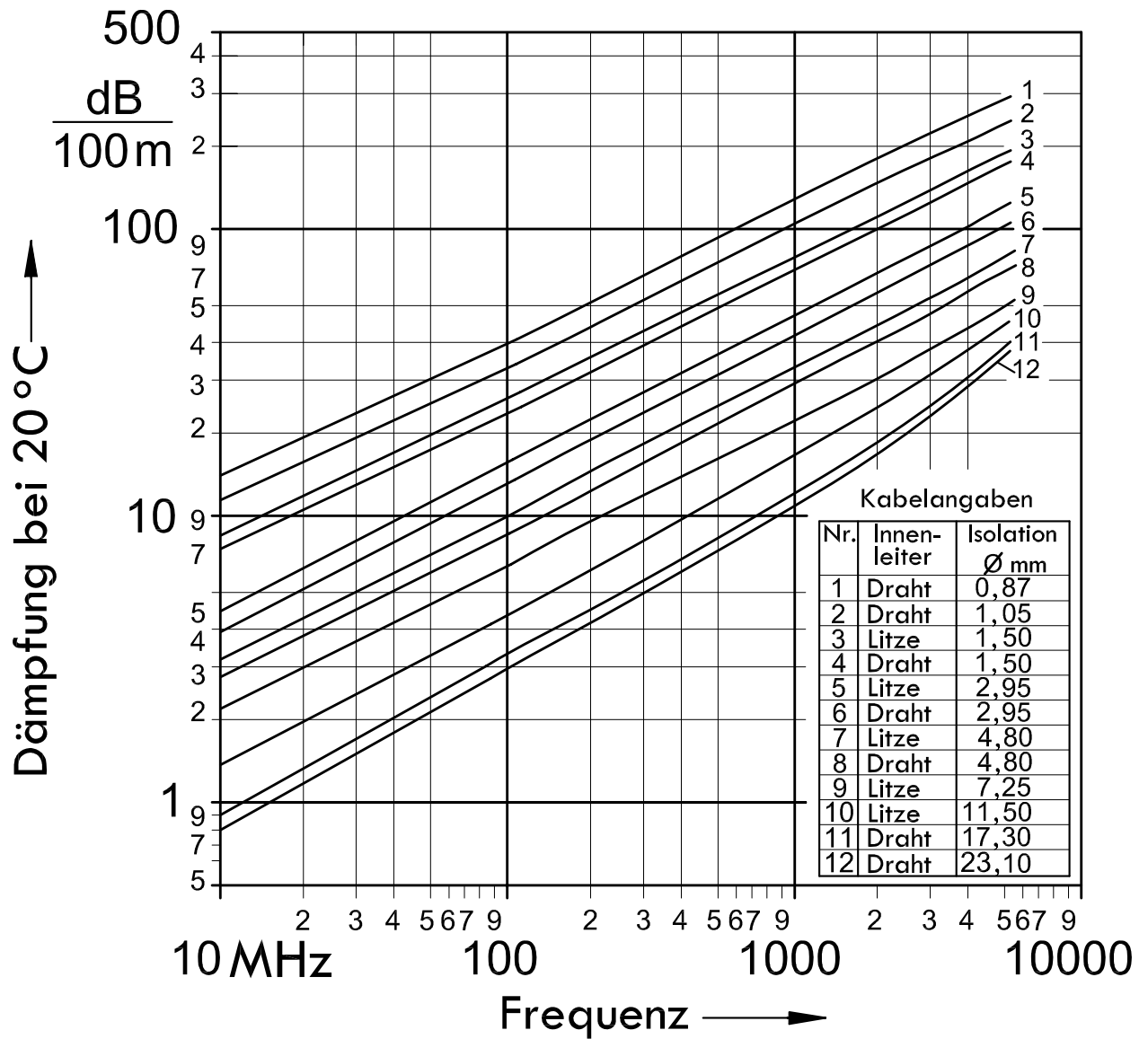


Abb. 5: Dämpfung von Koaxialkabeln mit $Z_L = 50 \Omega$ mit Polyethylen-Isolation (entnommen aus dem Katalog der Firma Huber und Suhner).