

Elektrische Signale sind immer von regellosen Schwankungen überlagert. Diese regellosen Schwankungen werden in Anlehnung an die Akustik auch mit „Rauschen“ bezeichnet. Wenn man ein Rauschsignal betrachtet, ergibt sich z.B. Bild 1.

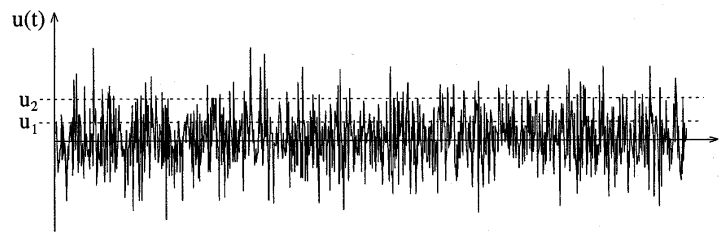


Abb. 1: Stochastisches Rauschsignal mit gaußförmigem $p(u)$

Ein solches Signal lässt sich zunächst einmal beschreiben durch seinen Mittelwert

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt, \quad (1)$$

der aber noch keine Aussage für das überlagerte Rauschsignal enthält. Eine erste Möglichkeit zur Charakterisierung des Rauschsignals besteht darin, die mittlere Abweichung der Spannung $u(t)$ vom Mittelwert \bar{u} zu beschreiben mit der Varianz

$$\sigma^2 = \overline{[u(t) - \bar{u}]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [u(t) - \bar{u}]^2 dt, \quad (2)$$

wobei σ als *Standardabweichung* bezeichnet wird.

Im Folgenden wollen wir uns auf **mittelwertfreie Rauschsignale** beschränken, d.h.

$$\overline{u(t)} = 0, \quad (3)$$

was immer möglich ist, wenn Gleichspannungen (bzw. -ströme) separat behandelt werden.

Das Rauschsignal lässt sich mit den so genannten Momenten n -ter Ordnung

$$\overline{[u(t)]^n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [u(t)]^n dt \quad (4)$$

beschreiben, wobei im Fall der Annahme (3) die Varianz einfach durch

$$\overline{u^2(t)} = \sigma^2 \quad (5)$$

gegeben ist.

Im folgenden wird vorausgesetzt, dass die zeitlichen Mittelwerte unabhängig von t_0 sind, der Vorgang wird dann als **stationär** bezeichnet. Alternativ zur zeitlichen Mittelwertbildung ist auch die Bildung eines Schar-Mittelwertes möglich. Hierbei handelt es sich um die Mittelwertbildung über eine große Zahl makroskopisch identischer Systeme zu einem *bestimmten* Zeitpunkt.

Die Bildung des Schar-Mittelwertes wird durch dreieckige Klammern $\langle \cdot \rangle$ charakterisiert. Wenn Schar-Mittelwert und zeitlicher Mittelwert übereinstimmen, spricht man auch von einem **ergodischen** Prozess. In diesem Kapitel wollen wir ergodische und stationäre Prozesse voraussetzen, was in den weitaus meisten Fällen auch erfüllt ist. Dann gilt beispielsweise für den quadratischen Mittelwert

$$\overline{u^2(t)} = \langle u^2 \rangle \quad . \quad (6)$$

1 Wahrscheinlichkeitsdichte

Um ein verrauschtes Signal genauer zu beschreiben, ist es zweckmäßig, die *Wahrscheinlichkeit* P dafür anzugeben, dass z. B. die Spannung u Werte zwischen u_1 und u_2 annimmt. Wenn die Spannung nie in diesem Intervall liegt, ist $P = 0$, während für den Fall, dass u immer in diesem Intervall liegt, $P = 1$ gilt.

Es lässt sich so schreiben

$$P \mid_{u_1 < u < u_2} = \int_{u_1}^{u_2} p(u) du \quad (7)$$

mit der **Wahrscheinlichkeitsdichte** $p(u)$, wobei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = 1 \quad (8)$$

gilt.

Die Momente gemäß (4) ergeben sich dann als

$$\langle u^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p(u) du \quad . \quad (9)$$

Zunächst sind viele verschiedene funktionale Zusammenhänge für $p(u)$ denkbar. Wenn man aber sehr viele stochastische (Rausch-)Signale überlagert, nähert sich $p(u)$ gemäß des **zentralen Grenzwertsatzes** einer Gaußfunktion, die dann für ein mittelwertfreies Rauschsignal ($\langle u \rangle = 0$) allein mit Kenntnis des quadratischen Mittelwertes $\langle u^2 \rangle$ vollständig beschrieben ist gemäß

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle u^2 \rangle}} e^{-1/2 \frac{u^2}{\langle u^2 \rangle}} \quad . \quad (10)$$

Zur Veranschaulichung des zentralen Grenzwertsatzes sei das Würfeln betrachtet. Für einen Würfel sind die Zahlen 1 bis 6 gleichverteilt ($\hat{=} p(n) = \text{const}$), bei 2 Würfeln ergibt sich für die gewürfelte Augensumme eine dreieckförmige Verteilung, während sich bei n Würfeln (n groß) schließlich eine gaußförmige Wahrscheinlichkeitsdichte für die gewürfelte Augensumme ergibt.

Wichtig ist, darauf hinzuweisen, dass ein gaußverteiltes Rauschsignal nach Durchgang durch lineare Netzwerke gaußverteilt bleibt. Nicht gaußverteilte Rauschsignale nähern sich beim Durchgang durch schmalbandige lineare Filter auch einer Gauß-Verteilung an.

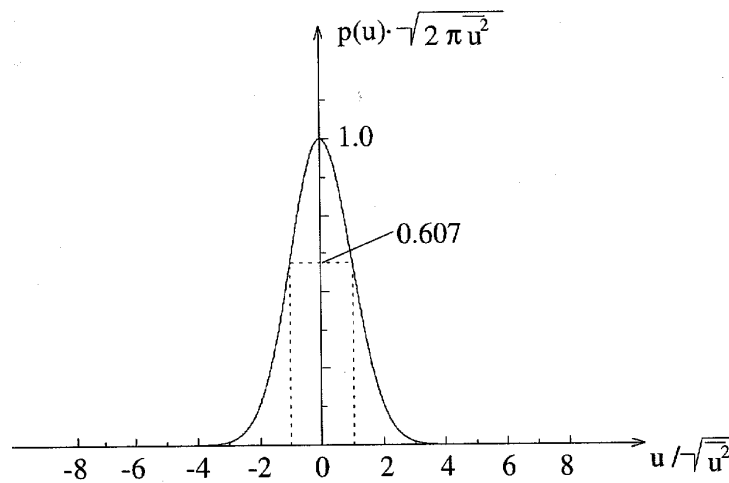


Abb. 2: Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsdichte

Aus diesen Gründen können die meisten Rauschprozesse als gaußverteilt angenommen werden, wobei dann die Kenntnis von $\langle u^2 \rangle$ gemäß (9), (10) auch die Bestimmung aller anderen Momente ermöglicht.

2 Autokorrelationsfunktion

Die genauere Beschreibung des Zeitverhaltens eines Rauschsignals $u(t)$ ist nicht in trivialer Weise möglich, da ja $u(t)$ stochastischen Schwankungen unterworfen ist. Es ist deshalb naheliegend, das Zeitverhalten von Rauschsignalen durch eine *Autokorrelationsfunktion* zu beschreiben.

Da die Energie eines Rauschsignals $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt$ gegen ∞ geht, kann die Autokorrelationsfunktion nicht wie bei energiebegrenzten Signalen (vergleiche Seite S/4) formuliert werden. Stattdessen wird die Autokorrelationsfunktion $\rho_u(\tau)$ für das Rauschsignal $u(t)$ formuliert gemäß

$$\rho_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t)u(t - \tau) dt \right) . \quad (11)$$

Der quadratische Mittelwert ist dann einfach durch

$$\langle u^2 \rangle = \rho_u(\tau = 0) \quad (12)$$

gegeben. Es gilt weiterhin

$$\rho_u(\tau) = \rho_u(-\tau) . \quad (13)$$

Die Autokorrelationsfunktion gemäß (11) lässt sich grundsätzlich mit dem in Bild 3 skizzierten Messaufbau messen.

Für ein einfaches intuitives Verständnis der Autokorrelationsfunktion stellen wir uns vor, dass der Beobachtungszeitraum T zwar sehr lang, aber doch endlich ist. Wenn wir uns weiterhin vereinfachend

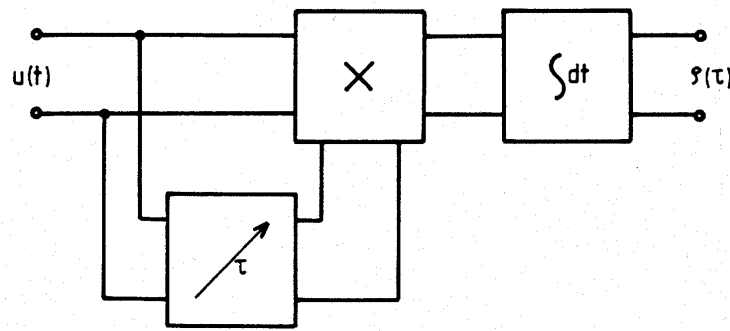


Abb. 3: Prinzipieller Messaufbau zur Messung der Autokorrelationsfunktion von Rauschsignalen

vorstellen, dass das Rauschsignal genau nur während dieses Beobachtungszeitraums existent wäre, hätten wir doch ein Signal endlicher Energie vorliegen und die Überlegungen aus Abschnitt 5 wären doch wieder anwendbar.

In diesem Sinne könnte die Autokorrelationsfunktion von (11) interpretiert werden als

$$\rho_u(\tau) \triangleq \frac{u(\tau) * u(-\tau)}{T} = \frac{R_u(\tau)}{T}, \quad (14)$$

d.h. proportional zur Faltung von $u(\tau)$ mit dem gespiegelten Signal $u(-\tau)$ bzw. zur Autokorrelationsfunktion R_u für energiebegrenzte Signale.

Die Beschreibung der Rauschsignale im Zeitbereich mit Hilfe der Autokorrelation ist doch etwas umständlich. In Anlehnung an deterministische Signale ist aber auch eine Beschreibung im Frequenzbereich möglich.

3 Spektrale Rauschleistungsdichte

Wenn wir zunächst von der vereinfachten, intuitiven Beschreibung (T groß, aber endlich; $u(t)$ nur innerhalb von T existent) ausgehen, können wir die Fouriertransformierte von $u(t)$ bzw. $u(\tau)$ angeben

$$u(\tau) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(j\omega) \quad (15)$$

und damit auch (vgl. Gl. (S 24))

$$\rho_u(\tau) \triangleq \frac{u(\tau) * u(-\tau)}{T} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{|\underline{U}(j\omega)|^2}{T}. \quad (16)$$

Es wird nun eine spektrale *Rauschleistungsdichte*

$$W_u(f) \triangleq \frac{2|\underline{U}(j\omega)|^2}{T}, \quad \omega = 2\pi f \quad (17)$$

eingeführt (Vorsicht: in der Literatur findet sich häufig auch die spektrale Rauschleistungsdichte ohne den Faktor 2 in (17)). Für den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ ergibt sich in genauerer Darstellung:

$$W_u(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \quad (18)$$

Der Zusammenhang zwischen der spektralen Rauschleistungsdichte $W_u(f)$ und der Autokorrelationsfunktion $\rho_u(\tau)$ ist dann in Anlehnung an (17) durch eine Fouriertransformierte gegeben:

$$2\rho_u(\tau) \quad \circ \text{---} \bullet \quad W_u(f) \quad (19)$$

Ausformuliert ergeben sich die *Wiener-Khintchine-Relationen*:

$$W_u(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 4 \int_0^{\infty} \rho_u(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (20)$$

$$\rho_u(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_u(f) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} W_u(f) \cos(2\pi f\tau) df \quad (21)$$

Mit (12),(21) lässt sich damit für den quadratischen Mittelwert schreiben (*Parsevalsches Theorem*):

$$\langle u^2 \rangle = \rho_u(\tau = 0) = \int_0^{\infty} W_u(f) df \quad (22)$$

Damit ist der quadratische Mittelwert auch direkt im Frequenzbereich formulierbar. Die spektrale Rauschleistungsdichte ist dann derart interpretierbar, dass $W_u(f)df$ den Beitrag für das Schwankungsquadrat $\langle u^2 \rangle$ aus dem Frequenzintervall df charakterisiert. Deshalb wird die spektrale Rauschleistungsdichte gelegentlich auch in der Form

$$W_u(f) = \frac{d\langle u^2 \rangle}{df} \quad (23)$$

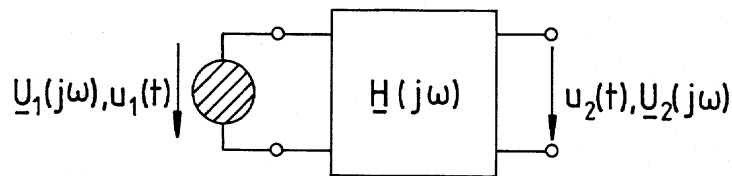
geschrieben, wobei $d\langle u^2 \rangle$ den Beitrag zum Schwankungsquadrat aus dem Frequenzintervall df beschreibt.

4 Übertragung von Rauschsignalen durch lineare Netzwerke

Wir betrachten ein (rauschfrei gedachtes) Netzwerk mit der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ gemäß Bild 4.

Für Rauschsignale sind prinzipiell beliebige spektrale Verteilungen $W_u(f)$ denkbar. Spezialfälle beinhalten z.B.

$$\begin{aligned} W_u(f) &= \text{const, weißes Rauschen} \\ W_u(f) &\sim 1/f, 1/f\text{-Rauschen.} \end{aligned}$$

Abb. 4: Lineares Netzwerk mit Rauschspannung $u_1(t)$ am Eingang

Aus der Eingangsspannung $u_1(t)$ wird dann nach Maßgabe der Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega)$ die Ausgangsrauschspannung $u_2(t)$.

Mit aller Vorsicht (Annahme wie oben; Beobachtungszeitraum T groß, aber endlich, $u(t)$ existiert nur innerhalb von T) lassen sich $u_1(t)$, $u_2(t)$ Fouriertransformierte $\underline{U}_1(j\omega)$, $\underline{U}_2(j\omega)$ zuordnen. Die Rechnung in linearen Netzwerken erfolgt dann mit \underline{U}_1 , \underline{U}_2 **genauso** wie bei deterministischen Signalen. Eigentlich ist der Umgang mit Rauschsignalen einfacher als bei deterministischen Signalen, da zur Bestimmung der spektralen Rauschleistungsdichte (17) nur der Betrag von \underline{U}_1 , \underline{U}_2 interessiert und die Phase ohne Belang ist.

Die Übertragung vom Eingang zum Ausgang in Bild 4 ist gegeben als

$$\frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \underline{H}(j\omega) \quad (24)$$

bzw.

$$\frac{|\underline{U}_2(j\omega)|^2}{|\underline{U}_1(j\omega)|^2} = |\underline{H}(j\omega)|^2, \quad (25)$$

woraus für die spektralen Leistungsdichten folgt

$$W_{u_2}(f) = \frac{d\langle u_2^2 \rangle}{df} = |\underline{H}(j\omega)|^2 \frac{d\langle u_1^2 \rangle}{df} = |\underline{H}(j\omega)|^2 W_{u_1}(f) \quad (26)$$

Mit (22) lässt sich dann das Schwankungsquadrat am Ausgang bestimmen:

$$\langle u_2^2 \rangle = \int_0^\infty W_{u_2}(f) df = \int_0^\infty |\underline{H}(j\omega)|^2 W_{u_1}(f) df \quad (27)$$

Falls $\underline{H}(j\omega)$ ein idealisiertes Bandpaßfilter mit der Mittenfrequenz f_0 gemäß

$$|\underline{H}(j2\pi f)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } |f - f_0| < \Delta f/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (28)$$

darstellt, ergibt sich

$$\langle u_2^2 \rangle = \int_{f_0 - \Delta f/2}^{f_0 + \Delta f/2} W_{u_1}(f) df \simeq W_{u_1}(f_0) \cdot \Delta f \quad (29)$$

Zum einen ist das Schwankungsquadrat am Filterausgang proportional zur Bandbreite Δf , und zum anderen besteht nach Maßgabe von (29) durch Messung von $\langle u_2^2 \rangle$ auch die Möglichkeit, $W_{u_1}(f_0)$ und damit bei variablem f_0 (z.B. bei einem Spektralanalysator) die spektrale Rauschleistungsdichte des Eingangssignals $u_1(t)$ zu bestimmen.

Thermisches Rauschen

Grundsätzlich kann man sich vorstellen, dass durch die thermische *Wimmelbewegung* der Elektronen an den Klemmen eines Ohm'schen Widerstandes eine regellose Rauschspannung entsteht, wie schematisch Bild 5 zeigt.

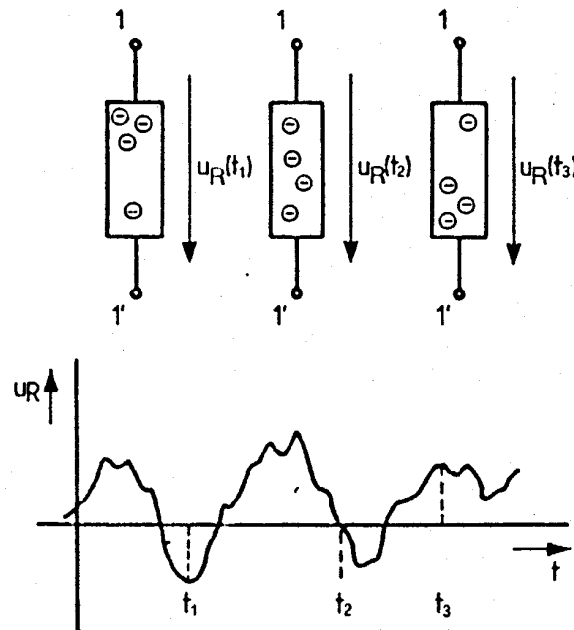


Abb. 5: Modellvorstellung (schematisch) zur Entstehung der Rauschspannung u_R eines thermisch rauschenden Widerstandes (aus Landstorfer, Graf, S. 72)

Gemäß der Zweipol-Darstellung von Spannungsquellen lässt sich so ein rauschender Widerstand der Temperatur T als ein rauschfreier Widerstand ($T = 0$ K) mit der Spannungsquelle $u_R(t)$ darstellen (siehe Bild 6).

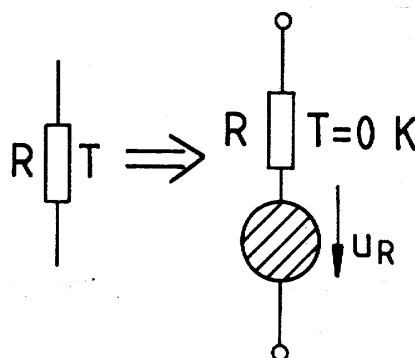


Abb. 6: Darstellung eines rauschenden Widerstandes mit der Leerlaufspannung $u_R(t)$

Die Spannung $u_R(t)$ sei durch die spektrale Rauschleistungsdichte

$$W_u(f) = d \langle u_R^2 \rangle / df \quad (30)$$

charakterisiert. Vereinfachend nehmen wir zunächst an, dass es sich beim thermischen Rauschen um ein weißes Rauschen, d.h. $W_u(f) = \text{const.}$, handelt.

Zur Bestimmung von W_u betrachten wir die einfache Schaltung gemäß Bild 7, bei der der rauschende Widerstand R mit einer Kapazität C verbunden ist.

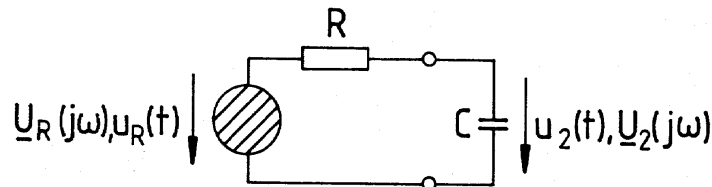


Abb. 7: Rauschender Widerstand R mit parallelgeschalteter Kapazität

Man kann nun die mittlere gespeicherte Energie W_{eC} der Kapazität C betrachten, die sich ergibt gemäß:

$$W_{eC} = \frac{C}{2} \langle u_2^2 \rangle \quad (31)$$

Wie aus der Thermodynamik bekannt ist, nimmt im thermodynamischen Gleichgewicht jeder Freiheitsgrad die Energie $kT/2$ mit der Boltzmann-Konstanten $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Ws/K an (vergleiche die *Brown'sche Molekularbewegung*). Eine Kapazität stellt in diesem Sinn genau einen Freiheitsgrad dar, so dass gilt:

$$W_{eC} = \frac{C}{2} \langle u_2^2 \rangle \stackrel{!}{=} kT/2 \quad (32)$$

und das Schwankungsquadrat $\langle u_2^2 \rangle$ ist in universeller Weise gegeben als:

$$\langle u_2^2 \rangle = kT/C \quad (33)$$

Beispielsweise ergibt sich bei Raumtemperatur $T = 290$ K und $C = 1$ pF ein $\sqrt{\langle u_2^2 \rangle} = 63 \mu\text{V}$.

Durch Kenntnis von $\langle u_2^2 \rangle$ gemäß (33) lässt sich mit (27) und der Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_R(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (34)$$

auch $W_u = d \langle u_R^2 \rangle / df$ ermitteln (Annahme: weißes Rauschen):

$$\langle u_2^2 \rangle = W_u \int_0^\infty |\underline{H}(j\omega)|^2 df = \frac{W_u}{4RC} \stackrel{!}{=} kT/C, \quad (35)$$

woraus sich die **spektrale Rauschleistungsdichte eines thermisch rauschenden Widerstandes** ergibt:

$$W_u = \frac{d \langle u_R^2 \rangle}{df} = 4 k T R \quad (36)$$

Gl. (36) gilt nicht bei extrem hohen Frequenzen, wo (36) übergeht in (vergleiche *Planck'sches Strahlungsgesetz*):

$$W_u(f) = \frac{4hfR}{e^{hf/kT} - 1}, \quad (37)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{Ws}^2$ bezeichnet. Für

$$f \lesssim 0.1 \frac{kT}{h} = 2.08 \text{ GHz} \cdot \frac{T}{\text{K}}, \quad (38)$$

also bei praktisch allen relevanten Frequenzen, geht (38) in (36) über. Für eine Messbandbreite Δf ergibt sich dann

$$\langle u_R^2 \rangle = 4kTR \cdot \Delta f, \quad (39)$$

die sich für Raumtemperatur ($T = 290 \text{ K}$) schreiben lässt:

$$\sqrt{\langle u_R^2 \rangle} = 4 \text{ nV} \sqrt{\frac{R}{\text{k}\Omega}} \sqrt{\frac{\Delta f}{\text{Hz}}}. \quad (40)$$

Statt einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand lässt sich auch eine Stromquelle mit Innenwiderstand angeben:

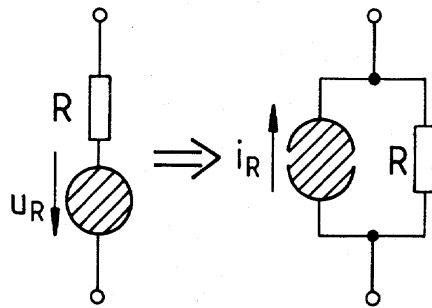


Abb. 8: Umwandlung einer Rauschspannungsquelle in eine Rauschstromquelle

Wie bei gewöhnlichen Strom- und Spannungsquellen ergibt sich $i_R = u_R/R$ bzw. für die Leistungsdichtespektren

$$\frac{d \langle i_R^2 \rangle}{df} = \frac{1}{R^2} \frac{d \langle u_R^2 \rangle}{df}, \quad (41)$$

so dass sich als Rauschstrom für eine Bandbreite Δf ergibt:

$$\langle i_R^2 \rangle = \frac{4kT}{R} \Delta f. \quad (42)$$

Im Prinzip könnte ein thermisch rauschender Widerstand seine Rauschleistung an einen rauschfreien Widerstand abgeben. Die *verfügbare Rauschleistung* P_{Rm} erhält man, wenn man den rauschenden

Widerstand R (z.B. in Bild 6) mit einem Lastwiderstand R belastet. Die verfügbare Rauschleistung innerhalb einer Bandbreite Δf ergibt sich mit (39) zu:

$$P_{Rm} = \frac{\langle u_R^2 \rangle}{4R} = kT \cdot \Delta f \quad , \quad (43)$$

woraus sich für $T = 290$ K ergibt:

$$P_{Rm} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ W} \cdot \frac{\Delta f}{\text{Hz}} \cong -174 \text{ dBm/Hz} \quad (44)$$

5 Schrotrauschen

Neben dem thermischen Rauschen ist das *Schrotrauschen* die wichtigste Rauschursache. Das Schrotrauschen entsteht, da bei einem makroskopisch fließenden Strom die einzelnen Stromimpulse der Elektronen nicht unbedingt gleichmäßig, sondern zu voneinander unabhängigen Zeiten auftreten.

Der Stromfluss setzt sich aus den Beiträgen der einzelnen Ladungsquanten (Elektronen) zusammen, wobei ein einzelnes Elektron zu einem Stromfluss

$$i_e(t) = e \cdot h(t) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 1 \quad (45)$$

führt (e -Elementarladung). Der Zeitverlauf $h(t)$ hängt dabei vom Aufbau des betrachteten Bauelements ab. Der gesamte Strom $i(t)$ stellt sich nun dar als Überlagerung über die einzelnen Ladungsquanten

$$i(t) = \sum_n e \cdot h(t - t_n) \quad , \quad (46)$$

wobei der Zeitpunkt t_n den Zeitpunkt des Auftretens des jeweiligen Ladungsquants charakterisiert.

Wenn die Stromimpulse regelmäßig auftreten, ergibt sich das in Bild 9a gezeigte Verhalten (Beispiel: Stromfluss in Metallen ohne Berücksichtigung des thermischen Rauschens)

Es ist offensichtlich, dass die Überlagerung der Stromimpulse in Bild 9a zu einem nahezu perfekten Gleichstrom führt, während in Bild 9b ein erhebliches Rauschen, das Schrotrauschen, auftritt.

Beim Schrotrauschen gehen wir davon aus, dass die Zeitpunkte t_n voneinander unabhängig sind (d.h. die Elektronen wissen nichts voneinander). Ein solcher Stromfluss tritt auf beim Austritt von Elektronen aus Metallen (daher hat das Schrotrauschen seinen Namen) oder bei der Rekombination oder Generation von Ladungsträgern in Halbleitern. So unterliegt der Stromfluss durch Dioden im allgemeinen dem Schrotrauschen.

Zur Berechnung der spektralen Rauschleistungsdichte des Schrotrauschens betrachten wir in Bild 9b den großen Zeitraum T mit N Stromimpulsen. Für die Pulsform $h(f)$ nehmen wir die Dirac-Funktion $\delta(t)$ an, so dass $i(t)$ dargestellt wird durch

$$i(t) = \sum_{n=1}^N e \cdot \delta(t - t_n) \quad (47)$$

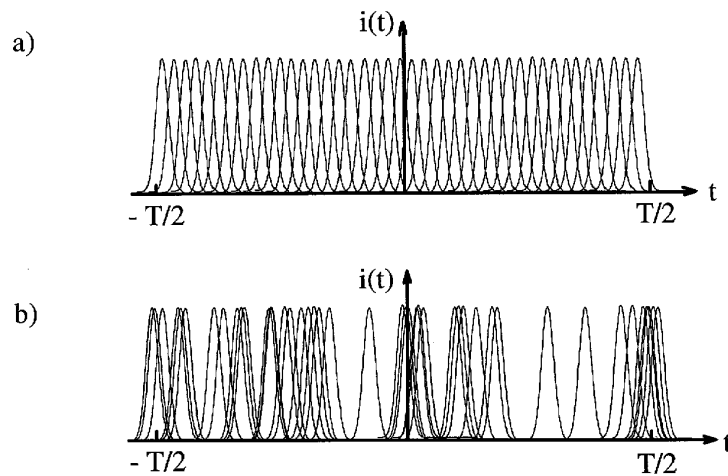


Abb. 9: Stromfluss mit Stromimpulsen einzelner Ladungsquanten; a) regelmäßiges Auftreten der Stromimpulse, b) unkorrelierte Zeitpunkte t_n der einzelnen Stromimpulse

und wir für die spektrale Leistungsdichte in Anlehnung an (18) erhalten (für Frequenzen $f \neq 0$):

$$\begin{aligned}
 W_i(f) &= \frac{2}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} i(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 = \frac{2}{T} \left| \sum_{n=1}^N e \cdot e^{j\varphi_n} \right|^2 \quad \text{mit } \varphi_n = -\omega t_n \\
 &= \frac{2}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N e^2 \exp(j\varphi_n - j\varphi_m) \\
 &= \frac{2}{T} \left(\underbrace{\sum_{n=1}^N e^2}_{Ne^2} + \underbrace{\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \sum_{m=1}^N e^2 \cos(\varphi_n - \varphi_m)}_{\simeq 0, \text{ da } \varphi_n, \varphi_m \text{ unabhängig voneinander}} \right), \quad (48)
 \end{aligned}$$

so dass sich schließlich mit dem Gleichstrom $I = N \cdot e/T$ für die spektrale Leistungsdichte des Schrotrauschens ergibt:

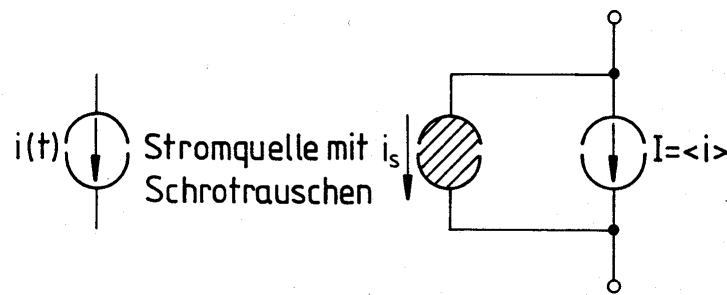
$$W_i(f) = \frac{d \langle i^2 \rangle}{df} = \frac{2Ne^2}{T} = 2eI, \quad f \neq 0. \quad (49)$$

Da wir uns hier auf mittelwertfreie Rauschsignale beschränken, lässt sich der schrotrauschbehaftete Strom $i(t)$ gemäß Bild 10 in einen Gleichstrom + Rauschstrom zerlegen.

Da es sich beim Schrotrauschen auch um ein weißes Rauschen handelt, lässt sich der Schrot-rauschstrom in der Messbandbreite Δf leicht angeben:

$$\sqrt{\langle i_s^2 \rangle} = \sqrt{2eI\Delta f} = 18 \text{ pA} \sqrt{\frac{I}{\text{mA}}} \sqrt{\frac{\Delta f}{\text{Hz}}} \quad (50)$$

Ein nahezu ideales Schrotrauschen zeigt eine Hochvakuumdiode in Sättigung (alle von der Kathode

Abb. 10: Strom $i(t)$ mit Schrotrauschen

emittierten Elektronen werden von der Anode abgesaugt), weshalb sie auch als Rauschnormal eingesetzt wird.

Ein Schrotrauschen wird auch in pn -Halbleiterdioden (einschließlich Photodioden), Schottky-Dioden o.ä. beobachtet.

Beispiel: Eine Halbleiter-Diode kann als Varistor eingesetzt werden (Beispiel: Schottky-Diode), wobei das Rauschen dann durch das Schrotrauschen gegeben ist. Der differentielle Widerstand r_0 ist dann gemäß Gl. (HLD 2) und (HLD 6), durch $r_0 = (kT/e)/I$ gegeben (Annahme $n = 1, I_0 \simeq 0$), so dass sich das Schrotrauschen gemäß (50) ergibt zu

$$\langle i_s^2 \rangle = 2eI\Delta f = \frac{2kT\Delta f}{r_0}, \quad (51)$$

was der Hälfte von $\langle i_R^2 \rangle$ eines thermisch rauschenden Widerstands r_0 (vergleiche (42)) entspricht.

6 Korrelation zwischen Rauschquellen

Im allgemeinen sind in elektronischen Netzwerken viele Rauschquellen enthalten, die entweder völlig unabhängig voneinander sind (unkorrelierte Rauschquellen) oder die zum Teil auf identische physikalische Ursachen zurückzuführen sind und damit auch zueinander korreliert sind.

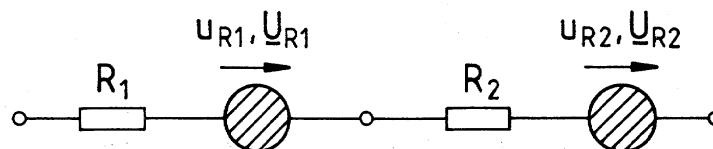


Abb. 11: Hintereinanderschaltung zweier rauschender Widerstände

Beginnen wir die Diskussion mit der Hintereinanderschaltung zweier rauschender Widerstände (Bild 11). Wenn wir uns auf feste (sehr lange) Beobachtungszeiträume T beziehen, lassen sich wieder für u_{R1}, u_{R2} die Fouriertransformierten $\underline{u}_{R1}, \underline{u}_{R2}$ einführen mit der Fouriertransformierten der Gesamtspannung $u_R = u_{R1} + u_{R2}$

$$\underline{u}_R = \underline{u}_{R1} + \underline{u}_{R2}, \quad (52)$$

woraus sich für die spektrale Rauschleistungsdichte ergibt:

$$\frac{d \langle u_R^2 \rangle}{df} \hat{=} \frac{2}{T} |\underline{u}_{R1} + \underline{u}_{R2}|^2 = \frac{2}{T} \left(|\underline{u}_{R1}|^2 + |\underline{u}_{R2}|^2 + 2\Re(\overline{\underline{u}_{R1}\underline{u}_{R2}^*}) \right). \quad (53)$$

Die Korrelation zwischen den Rauschquellen steckt im Produkt $\overline{\underline{u}_{R1}\underline{u}_{R2}^*}$, wobei sich bei unkorrelierten Rauschquellen für das Produkt $\underline{u}_{R1}\underline{u}_{R2}^*$ statistisch verteilte Phasen ergeben, so dass bei einer Mittelung selbst über eng benachbarte Frequenzen sich

$$\overline{\underline{u}_{R1}\underline{u}_{R2}^*} = 0 \quad (54)$$

ergibt. Im Beispiel von Bild 11 sind die Rauschquellen natürlich unkorreliert, so dass sich mit (53) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d \langle u_R^2 \rangle}{df} &= \frac{d \langle u_{R1}^2 \rangle}{df} + \frac{d \langle u_{R2}^2 \rangle}{df} \\ &= 4kTR_1 + 4kTR_2 = 4kT(R_1 + R_2). \end{aligned} \quad (55)$$

Die Schwankungsquadrate addieren sich einfach und als Rauschspannung der Hintereinanderschaltung von R_1 und R_2 ergibt sich einfach die Rauschspannung eines Widerstandes ($R_1 + R_2$).

Mathematisch exakter lässt sich die Korrelation beschreiben mit dem Kreuzspektrum

$$\underline{W}_{12}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^{+T/2} u_{R1}(t) e^{-j\omega t} dt \right) \left(\int_{-T/2}^{+T/2} u_{R2}(t) e^{+j\omega t} dt \right) \hat{=} \frac{2}{T} \overline{\underline{u}_{R1}\underline{u}_{R2}^*} \quad (56)$$

bzw. der Kreuzkorrelationsfunktion

$$\rho_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u_{R1}(t) u_{R2}(t - \tau) dt, \quad (57)$$

wobei ρ_{12} und \underline{W}_{12} durch die Fouriertransformation miteinander verknüpft sind:

$$2\rho_{12}(\tau) \overset{\circ}{\longleftrightarrow} \underline{W}_{12}(f), \quad (58)$$

so dass sich damit (53) schreiben lässt:

$$\frac{d \langle u_R^2 \rangle}{df} = \frac{d \langle u_{R1}^2 \rangle}{df} + \frac{d \langle u_{R2}^2 \rangle}{df} + 2\Re(\underline{W}_{12}(f)). \quad (59)$$

Es ist häufig anschaulicher, die Rauschspannung u_{R1} bzw. die Fouriertransformierte \underline{u}_{R1} in einen zu \underline{u}_{R2} unkorrelierten Anteil \underline{u}_{unc} sowie einen vollständig korrelierten Anteil \underline{u}_{cor} zu zerlegen:

$$\underline{u}_{R1} = \underline{u}_{unc} + \underline{u}_{cor} = \underline{u}_{unc} + \underline{k} \underline{u}_{R2}, \quad (60)$$

wobei \underline{k} einen Korrelationsterm darstellt.

Die Korrelation $\overline{\underline{u}_{R1}\underline{u}_{R2}^*}$ lässt sich so schreiben:

$$\overline{\underline{u}_{R1}\underline{u}_{R2}^*} = \underline{k} |\underline{u}_{R2}|^2, \quad (61)$$

so dass das Kreuzspektrum \underline{W}_{12} von (56) interpretiert werden kann als

$$\underline{W}_{12}(f) = \underline{k} \frac{d \langle u_{R2}^2 \rangle}{df} \quad (62)$$

Man kann auch einen Korrelationskoeffizienten $\underline{\gamma}$ einführen gemäß

$$\underline{\gamma} = \frac{\underline{W}_{12}(f)}{\sqrt{\frac{d \langle u_{R2}^2 \rangle}{df}} \sqrt{\frac{d \langle u_{R1}^2 \rangle}{df}}} = \underline{k} \frac{\sqrt{\frac{d \langle u_{R2}^2 \rangle}{df}}}{\sqrt{\frac{d \langle u_{R1}^2 \rangle}{df}}} \hat{=} \frac{\underline{U}_{R1} \underline{U}_{R2}^*}{|\underline{U}_{R1}| |\underline{U}_{R2}|} \quad (63)$$

wobei $|\underline{\gamma}| = 1$ einer vollständigen Korrelation entspricht (d.h. $\underline{U}_{unc} = 0$), während $\underline{\gamma} = 0$ unkorrelierte Signale beschreibt. Mit \underline{k} ergibt sich dann beispielsweise für die spektrale Rauschleistungsdichte gemäß (59):

$$\frac{d \langle u_R^2 \rangle}{df} = \frac{d \langle u_{R1}^2 \rangle}{df} + \frac{d \langle u_{R2}^2 \rangle}{df} (1 + 2\Re(\underline{k})) \quad (64)$$

In (60) beschreibt \underline{k} die Korrelation zweier Spannungen. Eine entsprechende Formulierung kann auch zur Beschreibung der Korrelation zwischen einem Rauschstrom und einer Rauschspannung verwendet werden, wobei dann \underline{k} die Bedeutung einer Korrelations-Admittanz bzw. -Impedanz einnimmt.

7 Rauschverhalten von linearen Vierpolen

Ein Vierpol bzw. Zweitor (z. B. ein Verstärker) beinhaltet im allgemeinen sehr viele Rauschquellen. Tatsächlich lässt sich das Rauschverhalten des Vierpols vollständig mit genau **zwei** Rausch-Ersatzquellen beschreiben, beispielsweise mit einer Rauschstrom- und einer Rauschspannungsquelle am Eingang wie in Bild 12 b.

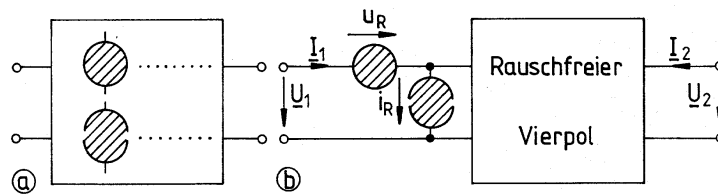


Abb. 12: Vierpol mit Rauschquellen: a) physikalisch, b) mit 2 Ersatzquellen

Alternativ können die beiden Rausch-Ersatzquellen auch am Ausgang oder sowohl am Ein- als auch am Ausgang angeordnet sein.

Es ist auch möglich, statt Rauschströmen oder -spannungen rauschende Wellenamplituden (\underline{a} , \underline{b} , vergleiche Streumatrix) anzugeben, wobei auch hier 2 Rausch-Ersatzquellen zur vollständigen Beschreibung des Rauschverhaltens genügen.

Die Messung der Rauschquellen i_R , u_R (Fouriertransformierte \underline{I}_R , \underline{U}_R) ist bei Kenntnis der \underline{y} -Parameter prinzipiell möglich beispielsweise durch Messung des Kurzschlussrauschstroms am Ausgang bei Kurzschluss oder Leerlauf am Eingang.

Kurzschluss am Eingang: Es gilt dann

$$I_2 = -\underline{y}_{21} U_R, \quad (65)$$

so dass dann für die spektrale Leistungsdichte von u_R folgt:

$$\frac{d \langle u_R^2 \rangle}{df} = \frac{1}{|\underline{y}_{21}|^2} \frac{d \langle i_2^2 \rangle}{df} \quad (66)$$

Leerlauf am Eingang: Es gilt dann

$$I_2 = -\frac{\underline{y}_{21}}{\underline{y}_{11}} I_R \quad (67)$$

und damit

$$\frac{d \langle i_R^2 \rangle}{df} = \left| \frac{\underline{y}_{11}}{\underline{y}_{21}} \right|^2 \frac{d \langle i_2^2 \rangle}{df}. \quad (68)$$

Eine Aussage über die Korrelation zwischen i_R , u_R erhält man, wenn zusätzlich noch Rauschmessungen mit bekannten Impedanzen am Eingang durchgeführt werden.

Beispiel: Wir betrachten das vereinfachte Rauschersatzschaltbild eines Si-FETs gemäß Bild 13.

Die folgenden Betrachtungen gelten ohne Berücksichtigung des $1/f$ -Rauschens, was für Frequenzen $f \geq 1$ kHz (Si-JFET), $f \geq 1$ MHz (Si-MOSFET) bzw. $f \geq 30$ MHz (GaAs-MESFET, HEMT) erfüllt ist.

Das Rauschen wird bestimmt durch den Kanalrauschstrom i_{RK} , dessen spektrale Rauschleistungsdichte gegeben ist durch

$$\frac{d \langle i_{RK}^2 \rangle}{df} = 4\Gamma kTS \quad (69)$$

mit $\Gamma \simeq 2/3$ für Si-FETs. Der Rauschstrom i_{RG} am Gate hat bei Si-FETs die spektrale Rauschleistungsdichte

$$\frac{d \langle i_{RG}^2 \rangle}{df} = 2eI_G + 0.3 \frac{4kT}{S} (\omega C_g)^2. \quad (70)$$

I_G bezeichnet den Gate-Leckstrom, dessen Rauscheinfluss meistens vernachlässigt werden kann.

Die Korrelation zwischen i_{RG} und i_{RK} ist mit $\underline{\gamma} \simeq j \cdot 0.4$ (vergl. (63)) gering und wird im folgenden vernachlässigt.

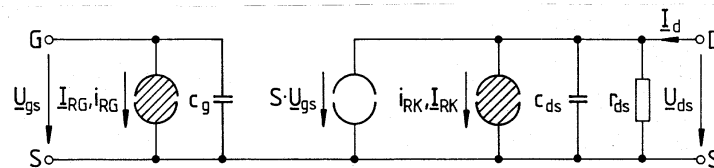


Abb. 13: Vereinfachtes Rauschersatzschaltbild eines Si-FETs

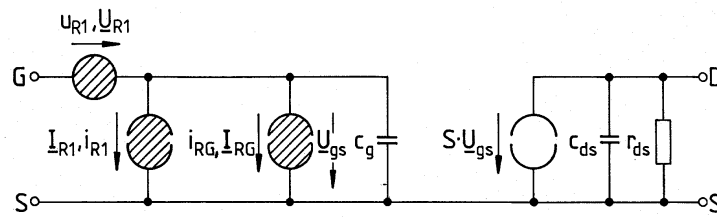


Abb. 14: Aus Bild 13 transformiertes Rauschschaltbild

Um zur Darstellung in Bild 12b zu gelangen, muss die Rauschstromquelle i_{RK} von Bild 13 an den Eingang transformiert werden, woraus sich dann in Bild 14 die Rauschquellen i_{R1} , u_{R1} derart ergeben, dass sowohl für Kurzschluss als auch Leerlauf am Eingang sich am Ausgang der gleiche Kurzschlussrauschstrom wie in Bild 13 ergibt.

Um in den Bildern 13 und 14 den gleichen Kurzschlussrauschstrom am Ausgang für Kurzschluss am Eingang zu gewährleisten, muss gelten:

$$\underline{u}_{R1} = -\frac{1}{S} L_{RK} \quad (71)$$

und damit (vergl. (69)):

$$\frac{d \langle u_{R1}^2 \rangle}{df} = \frac{4\Gamma kT}{S} \quad (72)$$

Um auch bei Leerlauf am Eingang den gleichen Kurzschlussrauschstrom am Ausgang in den Bildern 13 und 14 sicherzustellen, muss gelten

$$L_{R1} = -\frac{j\omega c_g}{S} L_{RK} \quad (73)$$

und damit für die spektrale Rauschleistungsdichte

$$\frac{d \langle i_{R1}^2 \rangle}{df} = \left(\frac{\omega c_g}{S}\right)^2 \frac{d \langle i_{RK}^2 \rangle}{df} = \Gamma \frac{4kT}{S} (\omega c_g)^2 \quad (74)$$

Die spektrale Rauschleistungsdichte des gesamten Rauschstroms am Eingang $i_R = i_{R1} + i_{RG}$ ist dann gegeben durch (Korrelation zwischen i_{RK} und i_{RK} bzw. i_{R1} vernachlässigt):

$$\frac{d \langle i_R^2 \rangle}{df} = \frac{d \langle i_{R1}^2 \rangle}{df} + \frac{d \langle i_{RG}^2 \rangle}{df} = (0.3 + \Gamma) \frac{4kT}{S} (\omega c_g)^2 \quad (75)$$

wobei der Einfluss von I_G in (70) vernachlässigt wurde.

Da i_{R1} und u_{R1} auf die gleiche physikalische Rauschursache zurückzuführen sind, sind sie vollständig miteinander korreliert. Die Korrelation zwischen dem gesamten Rauschstrom i_R und u_{R1} lässt sich ähnlich wie in (60) schreiben als

$$L_R = L_{RG} + Y_{cor} \underline{u}_{R1} \quad (76)$$

wobei \underline{I}_{RG} den unkorrelierten und $\underline{I}_{R1} = \underline{Y}_{cor} \underline{U}_{R1}$ den korrelierten Anteil darstellt. Der *Korrelationsleitwert* \underline{Y}_{cor} ergibt sich im Falle des betrachteten FETs durch Vergleich von (71) und (73) zu

$$\underline{Y}_{cor} = j\omega c_g \quad (77)$$

Zahlenbeispiel: Für einen Si-JFET ($\Gamma = 2/3$) mit $S = 7.5 \text{ mS}$ und $c_g = 3 \text{ pF}$ ergibt sich aus (72)

$$\sqrt{\frac{d \langle u_{R1}^2 \rangle}{df}} = 1,2 \text{ nV}\sqrt{\text{Hz}} \quad (78)$$

und aus (75)

$$\sqrt{\frac{d \langle i_R^2 \rangle}{df}} = \frac{0,027 \cdot f}{\text{MHz}} \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (79)$$

d.h. der Rauschstrom steigt proportional zur Frequenz an.

8 Generatorrauschetemperatur

Zur Charakterisierung des Rauschens von Verstärkern muss zunächst das Rauschen des Generators charakterisiert werden. Der Generator gemäß Bild 15 beinhaltet

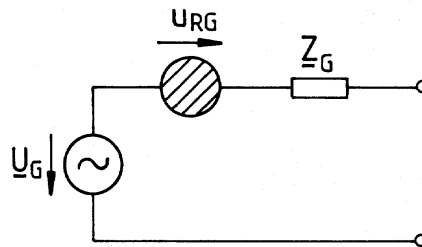


Abb. 15: Rauschersatzschaltbild des Generators

neben der Signalspannung \underline{U}_G noch die Rauschspannung u_{RG} , die mit der spektralen Rauschleistungsdichte

$$\frac{d \langle u_{RG}^2 \rangle}{df} = 4 k T_G \cdot \Re(\underline{Z}_G) \quad (80)$$

und einer im allgemeinen frequenzabhängigen *Generatorrauschetemperatur* T_G beschrieben werden kann. Damit wird der Generator so beschrieben, als würde die Generatorimpedanz \underline{Z}_G ein thermisches Rauschen der Temperatur T_G aufweisen. Tatsächlich kann T_G ganz erheblich von der Raumtemperatur abweichen, wie am Beispiel einer Empfangsantenne in Bild 16 deutlich wird. Es liegt dabei eine verlustfreie Antenne zugrunde, so dass die Rauschspannung der Antenne durch (80) mit $\Re(\underline{Z}_G) = R_S$ (R_S - Strahlungswiderstand) gegeben ist. Insbesondere bei niedrigen Frequenzen ist die Rauschetemperatur extrem hoch (insbesondere auch durch das atmosphärische Rauschen aufgrund von Gewittern), während sie bei Frequenzen $f > 1 \text{ GHz}$ durchaus auch kleiner als die Raumtemperatur werden kann,

wobei ein Minimalwert von $T_G = 2,7$ K erzielt werden kann (Antenne mit Ausrichtung in den 'kalten' Weltraum).

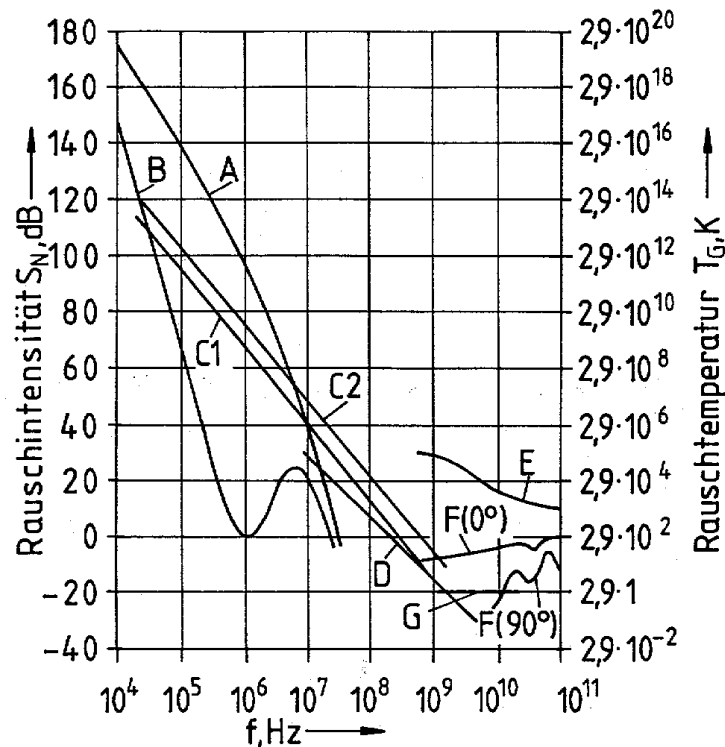


Abb. 16: Medianwerte der verschiedenen Rauschintensitäten bzw. Rauschtemperaturen in Abhängigkeit von der Frequenz: A atmosphärisches Rauschen (Maximalwert), B atmosphärisches Rauschen (Minimalwert), C1 industrielles Rauschen (ländlicher Empfangsort), C2 industrielles Rauschen (Stadt). D galaktisches Rauschen, E ruhige Sonne (Keulbreite der Antenne $0,5^\circ$), F Rauschen infolge Sauerstoff und Wasserdampf, obere Kurve für 0° Elevationswinkel, untere Kurve für 90° , G Strahlung des kosmischen Hintergrunds mit 2,7 K (Meinke/Gundlach: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, 5. Auflage 1992, S. H 17)

9 Rauschzahl und Rauschtemperatur von Verstärkern

Wird ein Generator gemäß Bild 15 mit einem Verstärker gemäß Bild 12b verbunden, ergibt sich Bild 17.

Da Spannungsquellen Kurzschlüsse darstellen, ist die Verstärkerrauschstromquelle i_R parallelgeschaltet zur Generatorimpedanz \underline{Z}_G . Die Parallelschaltung einer Impedanz mit einer Stromquelle lässt sich umwandeln in eine Spannungsquelle mit der Impedanz in Serie, so dass sich aus Bild 17 dann Bild 18 ergibt.

Die aus dem Rauschstrom i_R transformierte Rauschspannung u_{RI} ergibt sich als Leerlaufspannung der Parallelschaltung von i_R und \underline{Z}_G gemäß

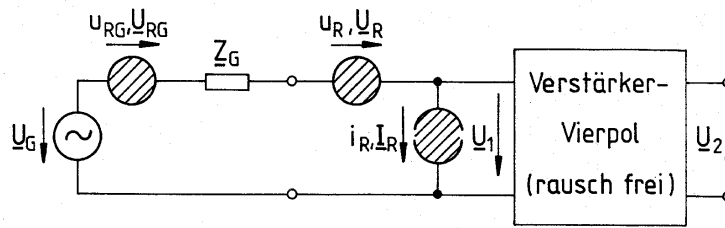


Abb. 17: Rauschersatzschaltbild eines Generators mit Verstärker

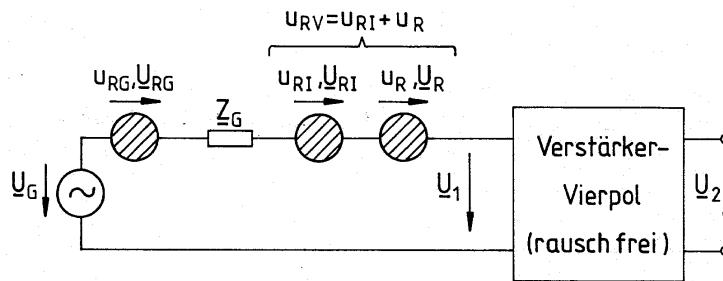


Abb. 18: transformiertes Rauschersatzschaltbild

$$\underline{U}_{RI} = \underline{Z}_G \underline{I}_R \quad (81)$$

Der gesamte Einfluss des Verstärkerrauschens lässt sich dann durch die gesamte Verstärkerrauschspannung

$$u_{RV} = u_{RI} + u_R \quad (82)$$

ausdrücken.

Die Rauschzahl F ist definiert als

$$F = \frac{\text{Signal/Rauschleistung - Verhältnis}|_{\text{Eingang}}}{\text{Signal/Rauschleistung - Verhältnis}|_{\text{Ausgang}}} \quad (83)$$

Diese Definition lässt sich umformulieren gemäß

$$F = \frac{\text{Signal/Rauschleistung - Verhältnis}|_{\text{rauschfreier Verstärker, } u_{RV}=0}}{\text{Signal/Rauschleistung - Verhältnis}|_{\text{rauschbehafteter Verstärker}}} \quad (84)$$

Da das Signal/Rausch-Verhältnis des Generators beispielsweise proportional ist zu $|\underline{U}_G|^2 / (d \langle u_{RG}^2 \rangle / df)$, lässt sich die Rauschzahl F formulieren als

$$F = \frac{|\underline{U}_G|^2 / (d \langle u_{RG}^2 \rangle / df)}{|\underline{U}_G|^2 / (d \langle (u_{RG} + u_{RV})^2 \rangle / df)} = \frac{d \langle (u_{RG} + u_{RV})^2 \rangle / df}{d \langle u_{RG}^2 \rangle / df} = 1 + \frac{d \langle u_{RV}^2 \rangle / df}{d \langle u_{RG}^2 \rangle / df} \quad (85)$$

wobei bereits davon Gebrauch gemacht wurde, dass Generator- und Verstärkerrauschen zueinander unkorreliert sind und damit gilt

$$\frac{d \langle (u_{RG} + u_{RV})^2 \rangle}{df} = \frac{d \langle u_{RG}^2 \rangle}{df} + \frac{d \langle u_{RV}^2 \rangle}{df} \quad (86)$$

Alternativ zur Rauschzahl wird häufig auch eine *Zusatzrauschzahl* $F_Z = F - 1$ eingeführt.

Mit der spektralen Rauschleistungsdichte des Generators von (80) lässt sich für die Rauschzahl F aus (85) auch schreiben:

$$F = 1 + \frac{d \langle u_{RV}^2 \rangle / df}{4kT_G \Re(\underline{Z}_G)} \quad (87)$$

Die Rauschzahl ist damit von der Rauschtemperatur des Generators abhängig, weshalb immer die Bezugstemperatur angegeben sein muss, wobei F im allgemeinen auf $T_G = T_0$ (T_0 – Raumtemperatur $T_0 = 290$ K) bezogen wird. Die Rauschzahl F wird im allgemeinen in dB gemäß

$$F_{dB} = 10 \cdot \lg(F) \text{dB} \quad (88)$$

angegeben (gelegentlich auch als Rauschmaß bezeichnet). Eine alternative Rauschbeschreibung ergibt sich, wenn das Verstärkerrauschen ähnlich wie das Rauschen des Generators in (80) gemäß

$$\frac{d \langle u_{RV}^2 \rangle}{df} = 4kT_V \Re(\underline{Z}_G) \quad (89)$$

mit der *Verstärkerrauschtemperatur* T_V beschrieben wird. Der Zusammenhang zwischen der Verstärkerrauschtemperatur und der Rauschzahl ist dann gemäß (87) einfach als

$$F = 1 + \frac{T_V}{T_G} \quad (90)$$

gegeben. Eine Rauschzahl von z.B. $F_{dB} = 3 \text{dB}$ (1dB) (Bezug: $T_G = T_0 = 290$ K) ist dann gleichbedeutend einer Verstärkerrauschtemperatur $T_V = 290$ K ($T_V = 75$ K).

10 Rauschanpassung

Zur Bestimmung der Rauschzahl, z.B. mit (87), ist aus den Vierpolrauschgrößen u_R, i_R die Verstärkerrauschspannung u_{RV} bzw. deren Fouriertransformierte \underline{U}_{RV} zu bestimmen, wobei sich mit (81), (82) ergibt:

$$\underline{U}_{RV} = \underline{U}_R + \underline{I}_R \underline{Z}_G \quad (91)$$

In Anlehnung an (85) und $d \langle u_{RV}^2 \rangle / df \sim |\underline{U}_{RV}|^2$ sowie $d \langle u_{RG}^2 \rangle / df \sim |\underline{U}_{RG}|^2$ lässt sich die Rauschzahl F auch schreiben

$$F = 1 + \frac{|\underline{U}_{RV}|^2}{|\underline{U}_{RG}|^2} = 1 + \frac{|\underline{I}_R|^2}{|\underline{U}_{RG}|^2} |\underline{Z}_G + \underline{U}_R / \underline{I}_R|^2 \quad (92)$$

Die Korrelation zwischen \underline{I}_R und \underline{U}_R wird ähnlich wie in (76) durch einen Korrelationsleitwert \underline{Y}_{cor} gemäß

$$\underline{I}_R = \underline{I}_{unc} + \underline{Y}_{cor} \cdot \underline{U}_R \quad (93)$$

mit dem unkorrelierten Anteil L_{unc} ausgedrückt. Weiterhin werden zur Vereinfachung der Schreibweise ein Leitwert $G_V(f)$ zur Beschreibung von i_R sowie ein Widerstand $R_n(f)$ zur Beschreibung von u_R eingeführt:

$$|L_R|^2 \sim \frac{d \langle i_R^2 \rangle}{df} = 4 k T_0 G_V \quad (94)$$

$$|U_R|^2 \sim \frac{d \langle u_R^2 \rangle}{df} = 4 k T_0 R_n \quad (95)$$

Weiterhin gilt

$$|U_{RG}|^2 \sim \frac{d \langle u_{RG}^2 \rangle}{df} = 4 k T_0 \Re(\underline{Z}_G) , \quad (96)$$

da die Rauschzahl auf das Generatorrauschen bei Raumtemperatur $T_G = T_0$ bezogen werden soll. Damit wird aus (92):

$$F = 1 + \frac{G_V}{\Re(\underline{Z}_G)} |\underline{Z}_G + \underline{U}_R/L_R|^2 \quad (97)$$

Die Rauschzahl ist damit abhängig von der Generatorimpedanz \underline{Z}_G . Diese Abhängigkeit von der Generatorimpedanz lässt sich eleganter formulieren in der Form

$$F = F_{min} + \frac{G_V}{\Re(\underline{Z}_G)} |\underline{Z}_G - \underline{Z}_{opt}|^2 \quad (98)$$

mit der minimalen Rauschzahl F_{min} bei $\underline{Z}_G = \underline{Z}_{opt}$. Nach Ausmultiplikation der Betragsquadrate in (97),(98) liefert ein Vergleich der einzelnen Terme (siehe Anhang):

$$|\underline{Z}_{opt}| = \sqrt{|U_R|^2/|L_R|^2} = \sqrt{R_n/G_V} \quad (99)$$

$$\Im(\underline{Z}_{opt}) = \Im(-\underline{U}_R/L_R) = \Im\left(\frac{-\overline{U_R L_R^*}}{|L_R|^2}\right) = \Im(\underline{Y}_{cor}) \cdot R_n/G_V \quad (100)$$

Nach Einsetzen von (99),(100) in (98) führt ein Vergleich mit (97) schließlich zur minimalen Rauschzahl

$$F_{min} = 1 + 2 \left(R_n \Re(\underline{Y}_{cor}) + G_V \Re(\underline{Z}_{opt}) \right) . \quad (101)$$

Die Darstellung in (98) macht deutlich, dass Generatorimpedanzen gleicher Rauschzahl in der \underline{Z}_G -Ebene durch Kreise, *sogenannte Rauschkreise*, dargestellt werden, wie beispielsweise in Bild 19 deutlich wird.

Die minimale Rauschzahl wird für die Generatorimpedanz $\underline{Z}_G = \underline{Z}_{opt}$ erreicht, man spricht dann auch von *Rauschanpassung*. Die optimale Generatorimpedanz für Rauschanpassung ist im allgemeinen von der Leistungsanpassung verschieden. Insbesondere für Eingangsstufen aber ist die Rauschanpassung wichtiger als die Leistungsanpassung.

Um Rauschanpassung zu erreichen, sollte der Generator mit einem verlustfreien Transformationswerk so transformiert werden, dass sich schließlich $\underline{Z}_G = \underline{Z}_{opt}$ ergibt.

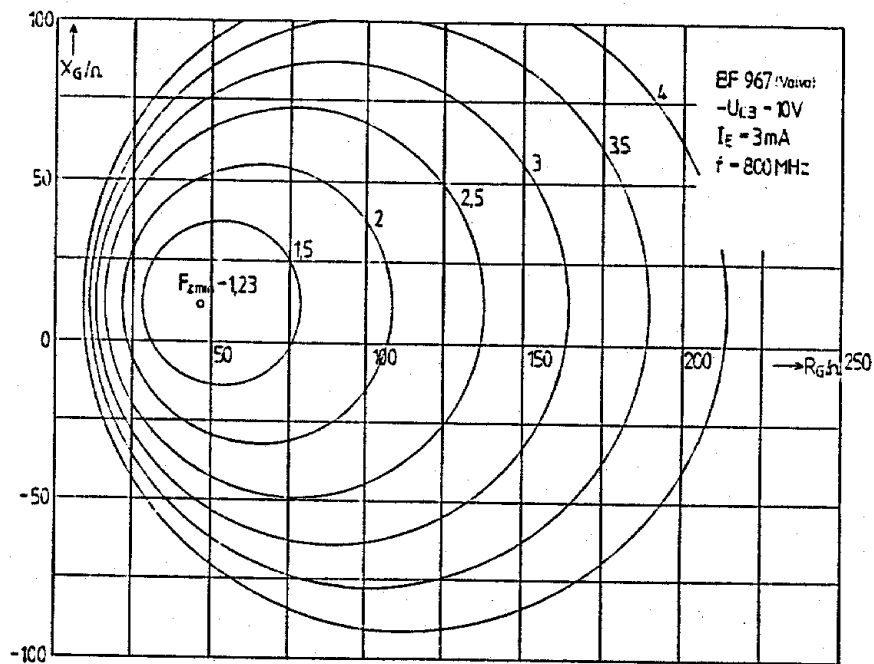


Abb. 19: Kreise konstanter zusätzlicher Rauschzahl für den Bipolartransistor BF 967

11 Beispiele für Rauschzahlen

Am Beispiel des oben behandelten *Si*-Sperrschicht-*FET*'s ergibt sich aus (72), (95)

$$R_n = \Gamma/S \quad (102)$$

und aus (75), (94) ein

$$G_V = \frac{(\omega C_g)^2}{S} (0,3 + \Gamma) \quad (103)$$

sowie $\underline{Y}_{cor} = j\omega C_g$ aus (77) und $\Gamma = 2/3$. Es gilt

$$R_n/G_V = \frac{\Gamma}{(0,3 + \Gamma)(\omega C_g)^2} = \frac{0,69}{(\omega C_g)^2} \quad (104)$$

und damit

$$|\underline{Z}_{opt}| = 0,83/\omega C_g \quad (105)$$

Gemäß (100) ergibt sich

$$\Im(\underline{Z}_{opt}) = 0,69/\omega C_g \quad (106)$$

woraus sich ein

$$\Re(\underline{Z}_{opt}) = \sqrt{(0,83)^2 - (0,69)^2}/\omega C_g = 0,46/\omega C_g \quad (107)$$

ergibt. Die minimale Rauschzahl erhält man dann mit $\Gamma = 2/3$ aus (101):

$$F_{min} = 1 + \frac{2\Gamma}{0.46} \frac{\omega C_g}{S} (1 - 0,69) \quad (108)$$

woraus sich

$$F_{min} = 1 + 0.89f/f_T \quad (109)$$

mit der Transitfrequenz f_T des FET (Gl. FET (3)) ergibt.

Gl. (109) gilt für Si-Sperrschicht-FETs. Für GaAs-MESFETs gelten etwas andere Beziehungen (vergleiche z.B. Zinke/Brunswig, Band 2), aber die grundsätzliche Aussage, dass die Rauschzahl mit zunehmendem f_T heruntergeht, bleibt erhalten.

Für Bipolartransistoren bei hohen Frequenzen ergibt sich näherungsweise folgende minimale Rauschzahl (H. Fukui: The noise performance of Microwave Transistors; IEEE Transactions on Electron Devices, March 1966, S. 329-341)

$$F_{min} \simeq 1 + h(1 + \sqrt{1 + 2/h}) \quad (110)$$

mit

$$h = \frac{r_b}{r_e} (f/f_T)^2 \quad (111)$$

Beispiel: Für einen HF-Bipolar-Transistor bei $I_E = 10\text{mA}$ ($r_e = 2.5 \Omega$), $r_b = 3 \Omega$ und $f_T = 7.5 \text{GHz}$ ergibt sich bei $f = 2 \text{GHz}$ ein

$$F_{min} = 1.5 \hat{=} 1.8 \text{ dB} \quad (112)$$

Die Rauschzahl ist damit deutlich größer als bei einem FET mit gleichem f_T (vergl. (109)).

12 Rauschzahl passiver, linearer Vierpole

Es sei ein linearer, verlustbehafteter Vierpol betrachtet, der sich auf Raumtemperatur T_0 befindet. Wenn sich am Eingang dieses Vierpols ein Generator mit der Rauschtemperatur $T_G = T_0$ befindet, ergibt sich auch am Ausgang (genau wie am Eingang) gemäß (42) eine verfügbare Rauschleistung von $P_{Rm} = kT_0\Delta f$. Die verfügbare Rauschleistung wird also durch das verlustbehaftete Netzwerk nicht reduziert. Die verfügbare Signalleistung wird jedoch reduziert nach Maßgabe der verfügbaren Leistungsverstärkung G_m ($G_m < 1$), so dass sich die Verschlechterung des Signal/Rauschleistungsverhältnisses vom Eingang zum Ausgang einfach durch die Rauschzahl

$$F = 1/G_m \quad (113)$$

beschreiben lässt. Die Rauschzahl eines verlustbehafteten linearen Netzwerks ist also in einfacher Weise mit den Verlusten dieses Netzwerks verknüpft.

13 Hintereinanderschaltung rauschender Vierpole

Gemäß Bild 20 seien 2 hintereinandergeschaltete Verstärkervierpole betrachtet. Die Rauschzahl F_1 und die verfügbare Leistungsverstärkung des ersten Vierpols sind dabei auf die Generatorimpedanz Z_G bezogen, während die Rauschzahl F_2 des zweiten Verstärkers

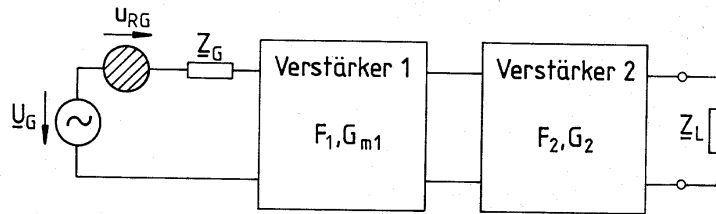


Abb. 20: Hintereinanderschaltung zweier Verstärkervierpole

auf eine Generatorimpedanz Z_A , entsprechend der Ausgangsimpedanz des ersten Verstärkers, zu beziehen ist.

Um die Rauschzahl gemäß (83) zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Signalleistung P_A am Ausgang.

$$P_A = G_2 G_{m1} P_{Gm} \quad (114)$$

mit der verfügbaren Signalleistung des Generators P_{Gm} . Für die verfügbare Rauschleistung am Eingang des Verstärkers 2 P_{R2m} gilt zunächst

$$P_{R2m} = F_1 \cdot G_{m1} P_{Rm} \quad (115)$$

mit der verfügbaren Rauschleistung P_{Rm} des Generators mit der Rauschtemperatur $T_G = T_0$ (Raumtemperatur), $P_{Rm} = kT_0\Delta f$.

Für die Rauschleistung am Ausgang P_{AR} gilt dann

$$P_{AR} = G_2 (P_{R2m} + P_{Z2}), \quad (116)$$

wobei P_{Z2} das Zusatzrauschen des Verstärkers 2 beschreibt:

$$P_{Z2} = (F_2 - 1) P_{Rm} \quad (117)$$

wieder mit der verfügbaren Rauschleistung $P_{Rm} = kT_0\Delta f$. Für P_{AR} nach (116) ergibt sich dann:

$$P_{AR} = G_2 G_{m1} P_{Rm} (F_1 + (F_2 - 1)/G_{m1}), \quad (118)$$

so dass sich als gesamte Rauschzahl

$$F_{ges} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{m1}} \quad (119)$$

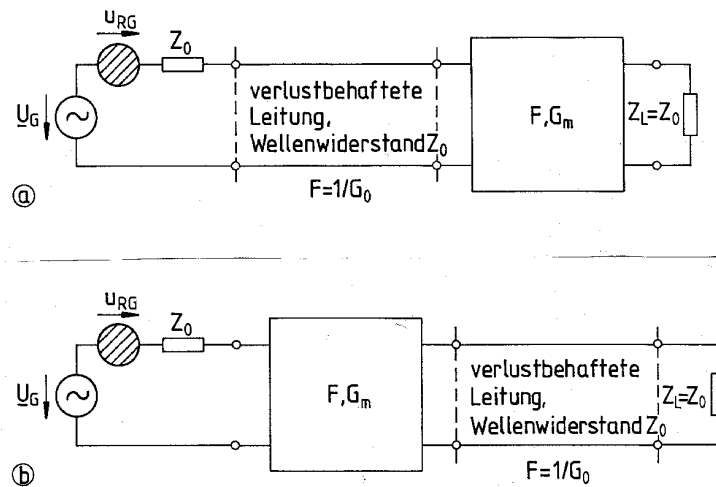


Abb. 21: Hintereinanderschaltung von verlustbehafteter Leitung und Verstärkervierpol

ergibt. Die Zusatzrauschzahl des 2. Verstärkers ($F_2 - 1$) wirkt sich damit nur reduziert um G_{m1} aus.

Beispiel: Hintereinanderschaltung von Verstärker und verlustbehafteter Leitung

Zur Betrachtung des Rauschverhaltens der Hintereinanderschaltung einer verlustbehafteten Leitung und eines Verstärkers gemäß Bild 21 sei angenommen, dass die Generatorimpedanz und auch die Ausgangsimpedanz des Verstärkers dem Wellenwiderstand Z_0 der Leitung entsprechen.

Die Rauschzahl der verlustbehafteten Leitung ist wie bei sonstigen verlustbehafteten Netzwerken durch $F = 1/G_0$ mit der verfügbaren Leistungsverstärkung G_0 ($G_0 < 1$) gegeben.

Es gilt dann für die gesamte Rauschzahl der Konfiguration

$$F_{ges} = \frac{1}{G_0} + \frac{F-1}{G_0} = F/G_0 \quad (120)$$

während sich für die Konfiguration nach Bild 21 b als gesamte Rauschzahl ergibt:

$$F_{ges} = F + \frac{1/G_0 - 1}{G_m} = F + \frac{1 - G_0}{G_m \cdot G_0} \quad (121)$$

Beispielsweise ergibt sich bei einer Leitung mit 3 dB Verlust ($G_0 = 0.5$) und einer Verstärkerrauschzahl $F \approx 1$ dB ($F = 1.26$) und einer Verstärkung $G_m = 20$ dB ($G_m = 100$) für die Konfiguration nach Bild 21 a.

$$F_{ges} \approx 4 \text{ dB} \quad (F = 2.52)$$

während sich für die Konfiguration in Bild 21b nur eine Rauschzahl von

$$F_{ges} \approx 1,04 \text{ dB}$$

ergibt. Für eine rauscharme Verstärkung ist es deshalb notwendig, den ersten Verstärker möglichst dicht am Generator wie in Bild 21 b anzuordnen (z.B. auch Antennenvorverstärker).

14 Anhang

Bestimmung von Z_{opt} und F_{min} gemäß (99) bis (101):

Zur Bestimmung von Z_{opt} und F_{min} sind (97) und (98) miteinander zu vergleichen. Die Ausrechnung von (97) führt auf:

$$F = 1 + \frac{G_V}{\Re(\underline{Z}_G)} \left(|\underline{Z}_G|^2 + |\underline{U}_R|^2 / |\underline{L}_R|^2 + 2 \Re(\underline{Z}_G \underline{U}_R^* / \underline{L}_R^*) \right) \quad (122)$$

Die Ausrechnung von (98) ergibt:

$$F = F_{min} + \frac{G_V}{\Re(\underline{Z}_G)} \left(|\underline{Z}_G|^2 + |\underline{Z}_{opt}|^2 - 2 \Re(\underline{Z}_G \underline{Z}_{opt}^*) \right) \quad (123)$$

Da (122), (123) für alle \underline{Z}_G identische Rauschzahlen F ergeben müssen, ergibt sich zunächst aus dem Vergleich von (122), (123)

$$|\underline{Z}_{opt}|^2 = |\underline{U}_R|^2 / |\underline{L}_R|^2 = \frac{R_n}{G_V} \quad , \quad (124)$$

wie in (99). Für die verbleibenden Terme führt das Gleichsetzen von (122), (123) auf:

$$1 + \frac{G_V}{\Re(\underline{Z}_G)} 2 \Re(\underline{Z}_G \underline{U}_R^* / \underline{L}_R^*) = F_{min} - \frac{G_V}{\Re(\underline{Z}_G)} 2 \Re(\underline{Z}_G \underline{Z}_{opt}^*) \quad . \quad (125)$$

Mit

$$\Re(\underline{Z}_G \underline{U}_R^* / \underline{L}_R^*) = \Re(\underline{Z}_G) \Re(\underline{U}_R / \underline{L}_R) + \Im(\underline{Z}_G) \Im(\underline{U}_R / \underline{L}_R)$$

und

$$\Re(\underline{Z}_G \underline{Z}_{opt}^*) = \Re(\underline{Z}_G) \Re(\underline{Z}_{opt}) + \Im(\underline{Z}_G) \Im(\underline{Z}_{opt})$$

folgt aus (125):

$$\begin{aligned} 1 + 2G_V \Re(\underline{U}_R / \underline{L}_R) + 2G_V \frac{\Im(\underline{Z}_G)}{\Re(\underline{Z}_G)} \Im(\underline{U}_R / \underline{L}_R) \\ = F_{min} - 2G_V \Re(\underline{Z}_{opt}) - 2G_V \frac{\Im(\underline{Z}_G)}{\Re(\underline{Z}_G)} \Im(\underline{Z}_{opt}). \end{aligned} \quad (126)$$

Die Gleichsetzung des jeweils rechten Terms auf der linken und rechten Seite von (126) ergibt

$$\Im(\underline{Z}_{opt}) = -\Im(\underline{U}_R / \underline{L}_R) \quad (127)$$

entsprechend (100). Die verbleibenden Terme in (126) führen auf

$$F_{min} = 1 + 2G_V \left(\Re(\underline{Z}_{opt}) + \Re(\underline{U}_R / \underline{L}_R) \right) \quad , \quad (128)$$

mit $\underline{U}_R / \underline{L}_R = \overline{\underline{U}_R \underline{I}_R^*} / |\underline{L}_R|^2 = \underline{Y}_{cor}^* \cdot R_n / G_V$ (vergl. (93)-(95)) ergibt sich schließlich (101).