

## 1 Harmonische Signale

Zeitabhängige Größen, wie z. B. Spannung, Strom oder Feld, sind häufig harmonische Größen. Solche sinus- oder kosinusförmigen Signale lassen sich auch durch komplexe Zeiger darstellen. Ein harmonisches Spannungssignal lässt sich beispielsweise folgendermaßen schreiben:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi) = \Re(\underline{U} \exp(j\omega t)) \quad (1)$$

mit dem komplexen Zeiger

$$\underline{U} = U_0 \exp(j\varphi) \quad (2)$$

Sind die zu untersuchenden Signale nicht harmonisch, so lassen sich diese durch eine Überlagerung mehrerer harmonischer Signale gemäß der Fourieranalyse darstellen.

## 2 Periodische, nicht harmonische Signale

Periodische Signale wiederholen sich nach einer bestimmten Zeit, der Periode  $\tau$

$$u(t) = u(t \pm \tau) \quad (3)$$

Ein Beispiel für ein derartiges Signal zeigt Abb. 1. Solche Signale lassen sich in Form einer Fourierreihe darstellen:

$$u(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \underline{U}_\nu \cdot \exp(j \cdot \nu \cdot \omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \quad (4)$$

Hierbei sind die Koeffizienten  $\underline{U}_\nu$  die zunächst unbekanntenen Fourierkoeffizienten. Nach Multiplikation von Gl. (4) mit  $\exp(-j\mu\omega_0 t)$  und anschließender Integration von  $t = -\tau/2$  bis  $t = \tau/2$  ergibt sich:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} u(t) \exp(-j\mu\omega_0 t) dt = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \underline{U}_\nu \underbrace{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(j(\nu - \mu)\omega_0 t) dt}_{\substack{= 0 \text{ für } \nu \neq \mu \\ = \tau \text{ für } \nu = \mu}} = \underline{U}_\mu \cdot \tau \quad (5)$$

aus Gl. (5) folgt

$$\underline{U}_\nu = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} u(t) \exp(-j\nu\omega_0 t) dt \quad (6)$$

Für reelle Signale  $u(t)$  folgt aus Gl. (6), dass  $\underline{U}_\nu = \underline{U}_\nu^*$ , so dass man auch schreiben kann:

$$u(t) = \Re \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\underline{U}_\nu \exp(j\nu\omega_0 t) \right\} + \underline{U}_0 \quad (7)$$

Für ein harmonisches Signal wie in Gl. (1) verbleibt nur  $\underline{U}_\nu$  mit  $\nu = 1$ , so dass dann  $\underline{U} = 2\underline{U}_1$  gilt.

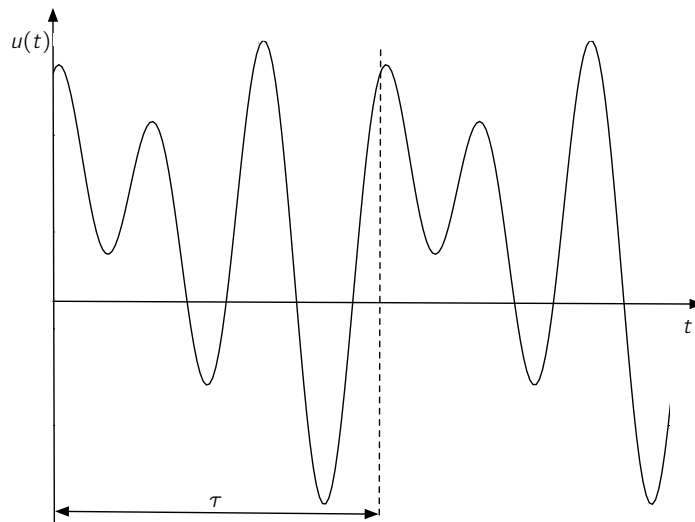


Abb. 1: Beispiel eines periodischen, nicht harmonischen Signals.

### 3 Nichtperiodische Signale

Ist das Signal nichtperiodisch, wie z. B. ein einzelner Puls mit der Zeitabhängigkeit  $u(t)$ , kann man ähnlich vorgehen wie in Abschnitt 2, allerdings mit der Annahme, dass die Periode des Signals  $\tau$  gegen unendlich geht:

$$\tau \rightarrow \infty; \quad \omega_0 \rightarrow d\omega \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2\pi}{d\omega}$$

Wenn man diese Beziehungen nun in Gl. (4) einsetzt mit  $\underline{U}(j\omega) = \underline{U}_\nu \cdot \tau$  bzw.  $\underline{U}_\nu = \underline{U}(j\omega) \cdot d\omega/2\pi$  und  $\omega = \nu \cdot d\omega$  erhält man:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (8)$$

wobei  $\underline{U}(j\omega)$  die Fouriertransformierte von  $u(t)$ ,  $\underline{U}(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)]$ , darstellt und sich analog zu Gl. (6) berechnet:

$$\underline{U}(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (9)$$

Formal kann man schreiben:

$$u(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}(j\omega), \quad (10)$$

wobei  $\underline{U}(j\omega)$  auch als *Fourierspektrum* oder *Spektraldichte* von  $u(t)$  bezeichnet wird.

### 4 Eigenschaften der Fouriertransformierten

Die Fouriertransformierte existiert für

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt < \infty \quad (11)$$

Diese Bedingung ist hinreichend, jedoch nicht notwendig. Eine weitere Bedingung ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt < \infty, \quad (12)$$

was eine endliche Energie des Signals  $u(t)$  impliziert.

Die Fouriertransformation ist der Laplace-Transformation ähnlich:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-s \cdot t) dt \quad \text{mit} \quad s = \sigma + j\omega \quad (13)$$

Im Gegensatz zur Fouriertransformation berücksichtigt die Laplace-Transformation das Signal nur für positive Zeitpunkte  $t \geq 0$ , konvergiert aber wegen  $\sigma > 0$  unter weniger einschränkenden Bedingungen. Beide Transformationen werden in der Hochfrequenztechnik verwendet:

**Laplace-Transformation** ist zweckmäßig für die Berechnung von Einschaltvorgängen.

**Fouriertransformation** ist zweckmäßig für Signale, die für negative Zeitpunkte  $t < 0$  nicht verschwinden.

Wir wollen im Folgenden nur die Fouriertransformation betrachten. Wenn das Signal die Bedingungen Gl. (11) und (12) erfüllt, ist es wahlweise im Zeitbereich als  $u(t)$  oder im Frequenzbereich als  $\underline{U}(j\omega)$  darstellbar. Dann gelten u. a. folgende Beziehungen:

#### Linearität

$$\begin{array}{l} u(t) \text{ --- } \bullet \quad \underline{U}(j\omega) \\ v(t) \text{ --- } \bullet \quad \underline{V}(j\omega) \end{array} \implies a \cdot u(t) + b \cdot v(t) \text{ --- } \bullet \quad a \cdot \underline{U}(j\omega) + b \cdot \underline{V}(j\omega) \quad (14)$$

#### Maßstabsänderung

$$u(a \cdot t) \text{ --- } \bullet \quad \frac{1}{|a|} \underline{U}\left(j \frac{\omega}{a}\right) \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (15)$$

#### zeitliche Verschiebung

$$u(t - t_0) \text{ --- } \bullet \quad \underline{U}(j\omega) \exp(-j\omega t_0) \quad (16)$$

#### Frequenzverschiebung

$$u(t) \exp(j\omega_0 t) \text{ --- } \bullet \quad \underline{U}[j(\omega - \omega_0)] \quad (17)$$

#### Amplitudenmodulation

$$u(t) \cos(\omega_0 t) \text{ --- } \bullet \quad \frac{1}{2} \{ \underline{U}[j(\omega - \omega_0)] + \underline{U}[j(\omega + \omega_0)] \} \quad (18)$$

#### Ableitung

$$\frac{du(t)}{dt} \text{ --- } \bullet \quad j\omega \cdot \underline{U}(j\omega) \quad (19)$$

#### n-fache Ableitung

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} \text{ --- } \bullet \quad (j\omega)^n \cdot \underline{U}(j\omega) \quad (20)$$

Unter Verwendung von Gl. (20) lässt sich eine Differentialgleichung im Zeitbereich in eine algebraische Gleichung im Frequenzbereich transformieren:

### Ableitung im Frequenzbereich

$$t \cdot u(t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad j \frac{dU(j\omega)}{d\omega} \quad (21)$$

### Faltung

$$u(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau) d\tau \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \underline{U}(j\omega)\underline{V}(j\omega) \quad (22)$$

Hierbei beschreibt \* das Symbol für die Faltung. Gl. (22) lässt sich durch direkte Anwendung der Definition der Fouriertransformation beweisen:

$$\mathcal{F}[u(t) * v(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau) d\tau \right] \cdot \exp(-j\omega t) dt$$

Nach Vertauschung der Reihenfolge der Integration erhält man:

$$\mathcal{F}[u(t) * v(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(t - \tau) \cdot \exp(-j\omega t) dt \right] u(\tau) d\tau$$

Nun substituiert man  $t' = t - \tau$  bzw.  $dt' = dt$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(t) * v(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(t') \cdot \exp(-j\omega t') \cdot \exp(-j\omega \tau) dt' \right] u(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(t') \cdot \exp(-j\omega t') dt' \right]}_{\underline{V}(j\omega)} \cdot \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \exp(-j\omega \tau) d\tau \right]}_{\underline{U}(j\omega)} \\ &= \underline{V}(j\omega) \cdot \underline{U}(j\omega) \end{aligned}$$

## 5 Autokorrelationsfunktion (AKF)

Die Autokorrelationsfunktion beschreibt die Korrelation zwischen dem Signal zum Zeitpunkt  $t' = \tau$  und zum Zeitpunkt  $t' = \tau - t$ , ausgedrückt durch das Produkt  $u(\tau) \cdot u(\tau - t)$ .

Bei **starker Korrelation** ist  $u(\tau) \cdot u(\tau - t) \approx u^2(\tau) \approx u^2(\tau - t)$ , bei **geringer Korrelation** verschwindet  $u(\tau) \cdot u(\tau - t)$  im Mittel. Die Korrelation ist abhängig von  $t$ .

Die Autokorrelationsfunktion ist folgendermaßen definiert:

$$R_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot u(\tau - t) d\tau \quad (23)$$

$$= u(t) * u(-t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \underline{U}(j\omega)\underline{U}(-j\omega) = \underbrace{|\underline{U}(j\omega)|^2}_{\text{für reelles } u(t)} \quad (24)$$

Die Fouriertransformierte der AKF entspricht somit der spektralen Energiedichte des Signals  $u(t)$ . Aus Gl. (8) und (24) folgt für  $t = 0$ :

$$R_u(t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{U}(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{U}(j\omega)|^2 df \quad \text{mit } f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (25)$$

Gl. (25) entspricht dem *Parsevalschen Theorem*.

Die Gesamtenergie  $\int u^2(t) dt$  eines Signals lässt sich somit sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich darstellen. Daher bezeichnet man  $|\underline{U}(j\omega)|^2$  auch als „*spektrale Energiedichte*“.