

## 1 Spannungs- und Stromtransformation

Wir wollen die Leitung in Abb. 1 als Vierpol betrachten. Dann können wir Beziehungen zwischen den Spannungen und Strömen am Anfang  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{I}_a$  und am Ende  $\underline{U}_e$  und  $\underline{I}_e$  herstellen:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_h(0) + \underline{U}_r(0) = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \quad (1)$$

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_h(0)}{\underline{Z}_L} - \frac{\underline{U}_r(0)}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_L} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \quad (2)$$

$$\underline{U}_e = \underline{U}_h(L) + \underline{U}_r(L) = \underline{U}_1 \exp(-\underline{\gamma}L) + \underline{U}_2 \exp(+\underline{\gamma}L) \quad (3)$$

$$\underline{I}_e = \frac{\underline{U}_h(L)}{\underline{Z}_L} - \frac{\underline{U}_r(L)}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{\underline{Z}_L} (\underline{U}_1 \exp(-\underline{\gamma}L) - \underline{U}_2 \exp(+\underline{\gamma}L)) \quad (4)$$

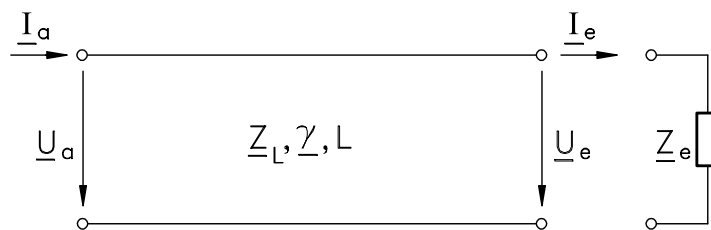


Abb. 1: Betrachtung der Leitung als Vierpol.

Nun kann man Gl. (3) und (4) nach  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_2$  auflösen:

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_e + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_e}{2} \exp(+\underline{\gamma}L) \quad (5)$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_e - \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_e}{2} \exp(-\underline{\gamma}L) \quad (6)$$

Gl. (5) und (6) lassen sich nun in Gl. (1) und (2) einsetzen, so dass man einen Ausdruck für  $\underline{U}_a$  erhält:

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{U}_e \frac{1}{2} \underbrace{\{\exp(\underline{\gamma}L) + \exp(-\underline{\gamma}L)\}}_{\cosh(\underline{\gamma}L)} + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_e \frac{1}{2} \underbrace{\{\exp(\underline{\gamma}L) - \exp(-\underline{\gamma}L)\}}_{\sinh(\underline{\gamma}L)} \\ \Rightarrow \underline{U}_a &= \underline{U}_e \cosh(\underline{\gamma}L) + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_e \sinh(\underline{\gamma}L) \end{aligned} \quad (7)$$

Wenn entsprechend Gl. (5) und (6) in Gl. (2) eingesetzt werden, ergibt sich für den Strom am Anfang der Leitung:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}_L} \sinh(\underline{\gamma}L) + \underline{I}_e \cosh(\underline{\gamma}L) \quad (8)$$

Zusammengefasst kann man obige Gleichungen als Kettenmatrix schreiben:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{I}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\underline{\gamma}L) & \underline{Z}_L \cdot \sinh(\underline{\gamma}L) \\ \sinh(\underline{\gamma}L)/\underline{Z}_L & \cosh(\underline{\gamma}L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_e \\ \underline{I}_e \end{pmatrix} \quad (9)$$

Mit solch einer Kettenmatrix lassen sich auch Hintereinanderschaltungen von Leitungen beschreiben. Dann müssen die Matrizen, die die einzelnen Leitungen beschreiben, miteinander multipliziert werden.

## 2 Widerstandstransformation

Der Abschlusswiderstand  $\underline{Z}_e = \frac{U_e}{I_e}$  sei bekannt. Gesucht ist dann der transformierte Widerstand  $\underline{Z}_a = \frac{U_a}{I_a}$  am Anfang der Leitung. Zur Bestimmung des transformierten Widerstands muss man nur das Verhältnis von Spannung zu Strom am Anfang der Leitung bilden. Aus Gl. (7) und (8) folgt dann mit  $\underline{U}_e = \underline{Z}_e \cdot \underline{I}_e$ :

$$\frac{U_a}{I_a} = \underline{Z}_a = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_e \cosh(\underline{\gamma}L) + \underline{Z}_L \sinh(\underline{\gamma}L)}{\underline{Z}_e \sinh(\underline{\gamma}L) + \underline{Z}_L \cosh(\underline{\gamma}L)} \quad (10)$$

und damit

$$\Rightarrow \underline{Z}_a = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_e + \underline{Z}_L \tanh(\underline{\gamma}L)}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_e \tanh(\underline{\gamma}L)} \quad (11)$$

### 2.1 Spezialfälle

1. Anpassung:  $\underline{Z}_e = \underline{Z}_L$

Der Abschlusswiderstand transformiert sich unverändert an den Anfang der Leitung:  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_L$ .

2. Sehr lange, verlustbehaftete Leitung mit  $\alpha \cdot z \gg 1$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sinh(\underline{\gamma}L) &\approx \frac{1}{2} \exp(\underline{\gamma}L) \approx \cosh(\underline{\gamma}L) \Rightarrow \tanh(\underline{\gamma}L) \approx 1 \\ \Rightarrow \underline{Z}_a &= \underline{Z}_L \end{aligned}$$

D.h. die Welle sieht den Abschlusswiderstand am Ende der Leitung nicht mehr und wird nur durch die Leitung selbst beeinflusst.

3. Verlustfreie Leitung mit  $\alpha = 0$ :

Der Leitungswellenwiderstand einer solchen Leitung ist rein reell:  $\underline{Z}_L = Z_L$ , und für die Ausbreitungskonstante gilt  $\underline{\gamma} = j\beta$ , so dass sich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \sinh(\underline{\gamma}L) &= \sinh(j\beta L) = j \sin(\beta L) \\ \cosh(\underline{\gamma}L) &= \cosh(j\beta L) = \cos(\beta L) \end{aligned} \right\} \tanh(j\beta L) = j \cdot \tan(\beta L), \quad (12)$$

woraus dann aus Gl. (11) folgt:

$$\Rightarrow \underline{Z}_a = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_e + j Z_L \tan(\beta L)}{Z_L + j \underline{Z}_e \tan(\beta L)} \quad (13)$$

### 2.2 Spezialfälle einer verlustfreien Leitung

1.  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung: Eine  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung ist durch eine Leitungslänge  $L = \frac{\lambda}{4}$  bzw.  $\beta L = \frac{\pi}{2}$  charakterisiert. Damit gilt

$$\tan(\beta \cdot L) \rightarrow \infty, \quad (14)$$

und aus Gl. (13) folgt für die Impedanz am Anfang der Leitung:

$$\Rightarrow \underline{Z}_a = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_e} \quad (15)$$

Entsprechend Gl. (15) führt damit eine  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung zu einer Impedanzinversion. Eine  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung lässt sich auch zur Impedanzanpassung verwenden. Wenn z.B.  $\underline{Z}_e = R_e$  und  $\underline{Z}_a = R_a$  vorgegeben sind, lässt sich die Forderung erfüllen, wenn  $Z_L$  als geometrischer Mittelwert beider Widerstände gewählt wird:

$$Z_L = \sqrt{R_a R_e} \quad (16)$$

2.  $\frac{\lambda}{2}$ -Leitung: Eine  $\frac{\lambda}{2}$ -Leitung wird durch  $\beta \cdot L = \pi$  charakterisiert. Daher ist  $\tan(\beta \cdot L) = 0$ , und aus Gl. (13) folgt einfach:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_e \quad (17)$$

3. Kurzschluss: Bei einem Kurzschluss am Leitungsende wird  $\underline{Z}_a$  rein reaktiv und aus Gl. (13) folgt:

$$\underline{Z}_a = j Z_L \tan(\beta \cdot L) \quad (18)$$

Der Verlauf der Impedanz  $\underline{Z}_a$  ist in Abb. 2a als Funktion von  $\beta \cdot L$  dargestellt. Da (zumindest für TEM-Wellen)  $\beta$  gemäß Gl. (LEI 25) proportional zur Frequenz  $\omega$  ist, lässt sich die  $\beta \cdot L$ -Achse in Abb. 2 auch als Frequenzachse interpretieren.

Für kleine Frequenzen ( $\beta \cdot L < \frac{\pi}{2}$ ) ist danach das Verhalten der kurzgeschlossenen Leitung induktiv während für  $\beta \cdot L \approx \frac{\pi}{2}$  das Impedanzverhalten dem eines Parallelschwingkreises entspricht (eine genauere Betrachtung erfolgt in Abschnitt 2.3). Für größere Frequenzen wird das Verhalten dann kapazitiv, und für  $\beta \cdot L \approx \pi$  ergibt sich dann das Verhalten eines Serienschwingkreises. Dieses Verhalten setzt sich dann zu höheren Frequenzen hin periodisch fort.

4. Leerlauf: Für  $\underline{Z}_e \rightarrow \infty$  folgt aus Gl. (13)

$$\underline{Z}_a = -j Z_L \cot(\beta \cdot L), \quad (19)$$

wobei dieser Verlauf in Abb. 2b dargestellt ist. Hier ergibt sich für kleine Frequenzen zunächst ein kapazitives Verhalten, während sich bei  $\beta \cdot L \approx \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$  ein Serienschwingkreis und für  $\beta \cdot L \approx \pi, 2\pi, 3\pi \dots$  ein Parallelschwingkreis ergibt.

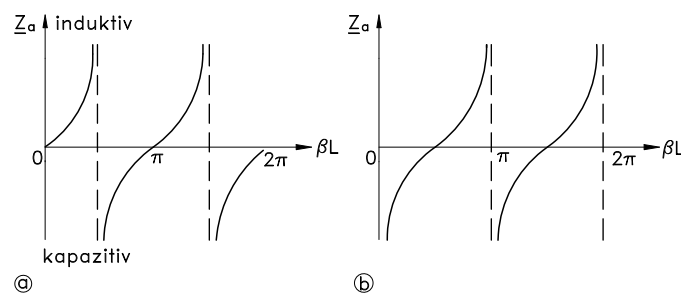


Abb. 2: Eingangsimpedanz einer verlustlosen Leitung bei a) Kurzschluss- bzw. b) Leerlauf am Ende der Leitung.

## 2.3 Vergleich zwischen $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung und Schwingkreis

Als Beispiel für einen Schwingkreis wird eine kurzgeschlossene  $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung betrachtet. In der Umgebung von  $\beta \cdot L = \frac{\pi}{2}$  entspricht dann das Impedanzverhalten dem eines Parallelschwingkreises entsprechend Abb. 3:

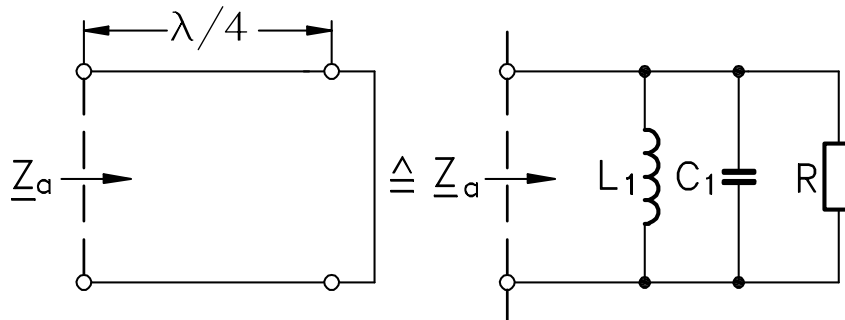


Abb. 3: Vergleich zwischen kurzgeschlossener Leitung und einem Parallelschwingkreis.

Im Folgenden haben wir das Ziel, die Ersatzelemente  $L_1, C_1, R$  des Parallelschwingkreises so zu bestimmen, dass  $\underline{Z}_a$  für  $\beta \cdot L \approx \frac{\pi}{2}$  korrekt beschrieben wird.

### 2.3.1 Betrachtung der kurzgeschlossenen Leitung

Die Verluste der Leitung sollen jetzt mit berücksichtigt werden, so dass aus Gl. (11) für  $\underline{Z}_e = 0$  folgt:

$$\underline{Z}_a = Z_L \tanh(\underline{\gamma}L) \quad (20)$$

Für die Extraktion der Ersatzelemente  $L_1, C_1, R$  ist es zweckmäßiger, die Admittanz zu betrachten:

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{Z_L} \coth(\underline{\gamma}L) \quad (21)$$

Wir wollen uns auf kleine Verluste  $\alpha L \ll 1$  beschränken, so dass mit

$$\underline{\gamma}L = \alpha L + j\beta L \quad (22)$$

sich

$$\coth(\underline{\gamma}L) = \frac{\exp(\underline{\gamma}L) + \exp(-\underline{\gamma}L)}{\exp(\underline{\gamma}L) - \exp(-\underline{\gamma}L)} \quad (23)$$

mit

$$\exp(\underline{\gamma}L) \approx \exp(j\beta L)(1 + \alpha L)$$

bzw.

$$\exp(-\underline{\gamma}L) \approx \exp(-j\beta L)(1 - \alpha L)$$

ergibt zu:

$$\begin{aligned} \coth(\underline{\gamma}L) &= \frac{\exp(j\beta L) + \exp(-j\beta L) + \alpha L[\exp(j\beta L) - \exp(-j\beta L)]}{\exp(j\beta L) - \exp(-j\beta L) + \alpha L[\exp(j\beta L) + \exp(-j\beta L)]} \\ &= \frac{\cos(\beta L) + j\alpha L \sin(\beta L)}{j \sin(\beta L) + \alpha L \cos(\beta L)} \end{aligned} \quad (24)$$

Da wir den Schwingkreis in der Nähe von  $\beta \cdot L \approx \frac{\pi}{2}$  betrachten, wird  $\cos(\beta L)$  sehr klein, und für die Admittanz  $\underline{Y}_a$  folgt aus Gl. (21) mit (24) für  $\alpha L \ll 1$  und  $\beta L \approx \frac{\pi}{2}$ :

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{Z_L} \left[ -j \frac{\cos(\beta L)}{\sin(\beta L)} + \alpha L \right] \quad (25)$$

Mit  $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_r} / c_0$  bzw.  $\beta = \omega / v_{ph}$  und der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  für  $\beta \cdot L = \frac{\pi}{2}$  (d.h.  $\frac{\omega_0 L}{v_{ph}} = \frac{\pi}{2}$ ) folgt aus Gl. (25):

$$\begin{aligned} \underline{Y}_a &= \frac{1}{Z_L} [-j \cot(\beta L) + \alpha L] = \frac{1}{Z_L} \left[ -j \cot\left(\frac{\omega L}{v_{ph}}\right) + \alpha L \right] \\ &= \frac{1}{Z_L} \left[ -j \cot\left(\frac{(\omega - \omega_0)L}{v_{ph}} + \frac{\pi}{2}\right) + \alpha L \right], \end{aligned} \quad (26)$$

was sich für  $(\omega - \omega_0) \frac{L}{v_{ph}} \ll 1$  näherungsweise schreiben lässt als:

$$\underline{Y}_a \approx \frac{1}{Z_L} \left( j \frac{(\omega - \omega_0)L}{v_{ph}} + \alpha L \right) \quad (27)$$

### 2.3.2 Vergleich mit diskretem Schwingkreis

Der Gesamtleitwert des Parallelschwingkreises in Abb. 3 kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\underline{Y}_a = j \left( \omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1} \right) + \frac{1}{R} \quad (28)$$

Wenn man nun die Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$  einführt und Frequenzen in ihrer Nähe ( $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ) betrachtet, erhält man folgenden Ausdruck:

$$\underline{Y}_a \approx j(\omega - \omega_0) \cdot 2C_1 + \frac{1}{R} \quad (29)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (27) erkennt man, dass sich der Leitungsresonator in der Nähe der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  durch einen äquivalenten Schwingkreis ersetzen lässt, dessen äquivalente diskrete Bauelemente folgende Größen haben:

$$C_1 = \frac{L}{2 Z_L v_{ph}} = \frac{C'}{2} \cdot L, \quad (30)$$

wobei von  $Z_L = \sqrt{L'/C'}$  und  $v_{ph} = 1/\sqrt{L'C'}$  Gebrauch gemacht wurde. Weiterhin ergibt sich

$$R = \frac{Z_L}{\alpha \cdot L} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \frac{1}{\alpha \cdot L} \quad (31)$$

$$L_1 = \frac{8L'}{\pi^2} \cdot L. \quad (32)$$

Die Güte  $Q$  des Schwingkreises ergibt sich zu:

$$Q = \omega_0 C_1 \cdot R = \frac{\omega_0}{2\alpha \cdot v_{ph}} \quad (33)$$

### 2.3.3 Beispiel

Für  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1000 \text{ MHz}$  und  $v_{ph} = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ , sowie  $\alpha = 0,1 \frac{dB}{m}$  ergibt sich eine Güte von  $Q = 1370$ . Die Länge  $L$  des Leitungsschwingkreises wird dann zu  $L = 5 \text{ cm}$ . Es lassen sich umso höhere Güten erreichen, je geringer die Dämpfung und je höher die Resonanzfrequenz wird.

## 3 Smith-Diagramm

Eine Impedanztransformation ist auch mit Hilfe des sog. *Smith-Diagramms* möglich. Dazu wird die Gl. (WEL 18) zunächst auf den Leitungswellenwiderstand normiert:

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z}_e / \underline{Z}_L - 1}{\underline{Z}_e / \underline{Z}_L + 1} = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} \quad (34)$$

Hierbei ist  $\underline{z}$  die normierte Impedanz am Ende der Leitung – nicht zu verwechseln mit der Ortskoordinate  $z$ !

Gl. (34) beschreibt eine konforme Abbildung von der  $\underline{z}$ -Ebene ( $\underline{z} = u + jv$ ) in die  $\underline{r}$ -Ebene. Physikalisch realisierbar als passive Abschlüsse sind nur Impedanzen mit  $\Re(\underline{z}) > 0$  (nur positive ohm'sche Widerstände). Die rechte  $\underline{z}$ -Halbebene mit  $\Re(\underline{z}) > 0$  wird in das Innere des Einheitskreises abgebildet.

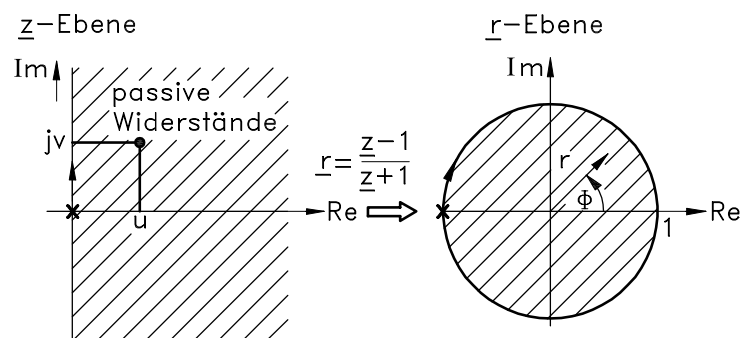


Abb. 4: Das Smith-Diagramm ist die Abbildung der rechten  $\underline{z}$ -Halbebene in den Einheitskreis in der  $\underline{r}$ -Ebene.

### 3.1 Abbildung ausgezeichneter Punkte

Die imaginäre Achse in der  $\underline{z}$ -Ebene wird auf den Einheitskreis in der  $\underline{r}$ -Ebene abgebildet:

$$\underline{z} = j \cdot v \Rightarrow \underline{r} = \frac{jv - 1}{jv + 1} = \exp(j\phi) \text{ mit } \phi = \pi - 2 \arctan(v)$$

Die reelle Achse in der  $\underline{z}$ -Ebene wird wiederum auf die reelle Achse der  $\underline{r}$ -Ebene abgebildet:

$$\underline{z} = u \Rightarrow \underline{r} = \frac{u - 1}{u + 1} \Rightarrow \text{rein reeller Bruch,}$$

wobei sich für den Bereich  $u > 0$  reelle Werte  $\underline{r}$  zwischen  $\underline{r} = -1$  (Kurzschluss,  $u = 0$ ) und  $\underline{r} = +1$  (Leerlauf,  $u \rightarrow \infty$ ) innerhalb des Einheitskreises ergeben.

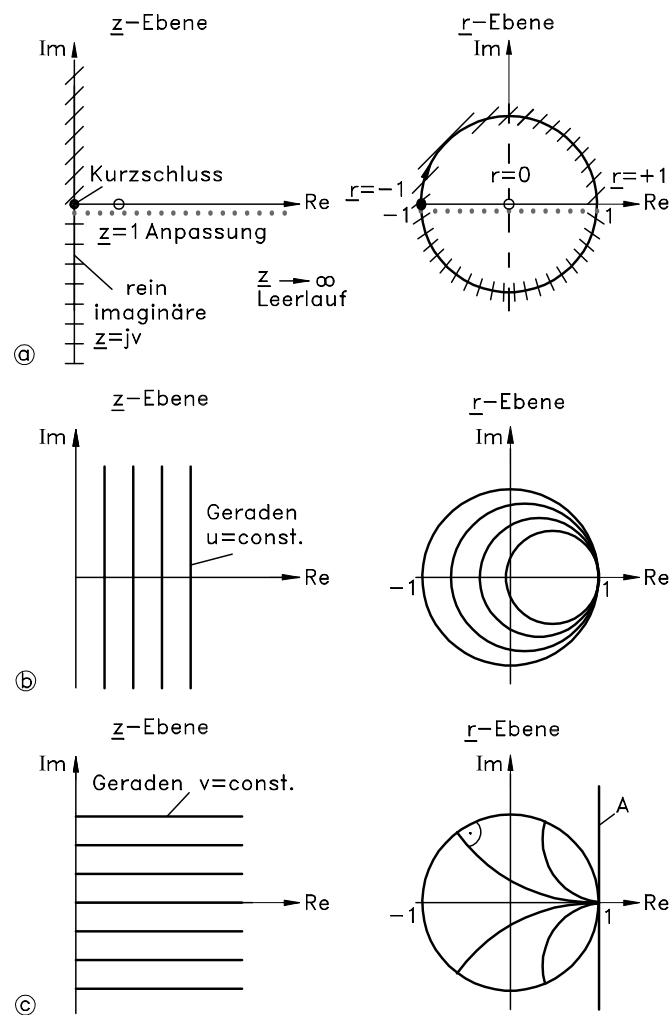


Abb. 5: Smithdiagramm als konforme Abbildung der rechten  $z$ -Halbebene in den Einheitskreis  $|r| \leq 1$  in der  $r$ -Ebene gemäß  $r = (z-1)/(z+1)$ : a) Abbildung der imaginären Achse und der reellen Achse ( $u > 0$ ) in die  $r$ -Ebene, b) Abbildung von Geraden mit  $u = \Re(z) = \text{const.}$ , c) Abbildung von Geraden mit  $v = \Im(z) = \text{const.}$

Weitere ausgezeichnete Punkte:

- Anpassung:  $z = 1 \Rightarrow r = 0$
- Kurzschluss:  $z = 0 \Rightarrow r = -1$
- Leerlauf:  $z \rightarrow \infty \Rightarrow r = +1$
- Impedanzwerte mit konstantem Realteil werden in Kreise abgebildet, deren Mittelpunkte auf der reellen Achse der  $r$ -Ebene liegen und durch  $r = 1$  gehen.
- Impedanzwerte mit konstantem Imaginärteil werden ebenfalls in Kreise abgebildet, die durch  $r = 1$  gehen, deren Mittelpunkte aber auf der mit  $A$  bezeichneten Achse liegen.

- Die obere Halbebene der  $\underline{r}$ -Ebene zeigt induktives Verhalten:  $\Im(\underline{r}) > 0 \Leftrightarrow \Im(\underline{z}) > 0$ .
- Die untere Halbebene der  $\underline{r}$ -Ebene zeigt kapazitives Verhalten:  $\Im(\underline{r}) < 0 \Leftrightarrow \Im(\underline{z}) < 0$ .

Das Innere des Einheitskreises in der  $\underline{r}$ -Ebene wird auch als *Smith-Diagramm* bezeichnet und ist nochmals in Abb. 6 dargestellt. Die Parameter im Smith-Diagramm bezeichnen jeweils  $u$  und  $v$  aus der  $\underline{z}$ -Ebene.

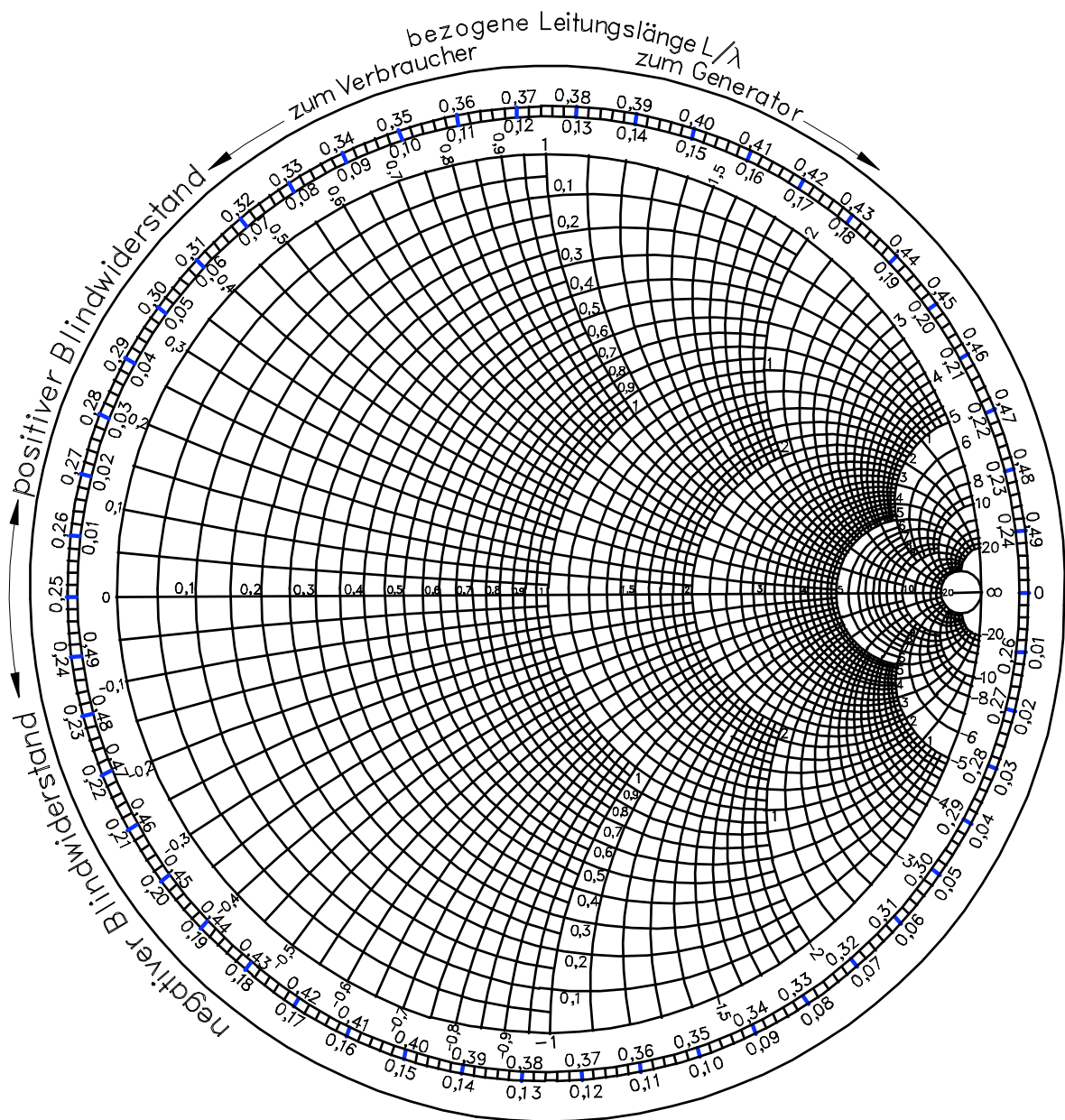


Abb. 6: Smith-Diagramm.



## 4 Impedanztransformation mit dem Smith-Diagramm

Mit dem Smith-Diagramm lässt sich in sehr einfacher Form die Impedanztransformation entlang einer Leitung beschreiben. Die Transformation des Reflexionsfaktors vom Leitungsende an den Leitungsanfang erfolgt gemäß Gl. (WEL 26):

$$\underline{r}(0) = \underline{r}(L) \exp(-2\gamma L) \quad (35)$$

$$= \underbrace{\underline{r}(L) \exp(-2\alpha L)}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{\exp(-2j\beta \cdot L)}_{\text{Phasendrehung zum Generator}} \quad (36)$$

$$\underline{r}(L) = \frac{\underline{Z}_e / \underline{Z}_L - 1}{\underline{Z}_e / \underline{Z}_L + 1} = \frac{\underline{z}(L) - 1}{\underline{z}(L) + 1} \quad (37)$$

$$\underline{r}(0) = \frac{\underline{Z}_a / \underline{Z}_L - 1}{\underline{Z}_a / \underline{Z}_L + 1} = \frac{\underline{z}(0) - 1}{\underline{z}(0) + 1} \quad (38)$$

Somit ist die Vorgehensweise folgendermaßen:

$\underline{Z}_e$  sei vorgegeben, dann ergibt sich die normierte Impedanz am Leitungsende zu:

$$\underline{z}(L) = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_L} \quad (39)$$

$\underline{z}(L)$  wird nun im Smith-Diagramm eingetragen, so dass  $\underline{r}(L)$  vorliegt. Im Smith-Diagramm wird dann  $\underline{r}(L)$  gemäß Gl. (36) in  $\underline{r}(0)$  umgewandelt. Aus  $\underline{r}(0)$  folgt dann die normierte Impedanz  $\underline{z}(0)$ , woraus dann schließlich nach Entnormierung die gesuchte Impedanz am Anfang der Leitung entsteht.

### 4.1 Beispiel: $\underline{Z}_e = 25 \Omega (1 - j)$ , $Z_L = 50 \Omega$ , $L = \lambda/8$ .

$$\underline{Z}_e = 25 \Omega (1 - j) \Rightarrow \underline{z}(L) = \frac{1}{2}(1 - j)$$

Aus  $\underline{z}(L)$  ergibt sich  $\underline{r}(L)$  in Abb. 7. Mit der Annahme, dass die Verluste  $\exp(-2\alpha L) = \frac{1}{2}$  betragen, folgt aus Gl. (36) ein  $|\underline{r}(0)| = \frac{1}{2}|\underline{r}(L)|$ .

Die Leitungslänge  $L = \frac{\lambda}{8}$  führt zu einer Phasendrehung  $2 \cdot \beta \cdot L = \frac{\pi}{2}$ , so dass sich dann  $\underline{r}(0)$  in Abb. 7 ergibt. Aus dem Smith-Diagramm lässt sich dann  $\underline{z}(0) = 0,65 + j 0,15$  ablesen, woraus sich schließlich ein  $\underline{Z}_a = 32,5 \Omega + j 7,5 \Omega$  ergibt.

### 4.2 weitere Beispiele

1. verlustlose, am Ende kurzgeschlossene Leitung mit  $\frac{L}{\lambda} = 0,199 \Rightarrow \underline{Z}_a = 3j Z_L$
2. verlustlose, am Ende offene Leitung mit  $\frac{L}{\lambda} = 0,1 \Rightarrow \underline{Z}_a = -1,4j Z_L$

### 4.3 Vorgehensweise bei komplexeren Fragestellungen

Wenn man z.B. eine Impedanztransformation an den Anfang einer verketteten Leitung mit unterschiedlichen Leitungswellenwiderständen vornehmen möchte (siehe Abb. 8), muss man folgendermaßen vorgehen:

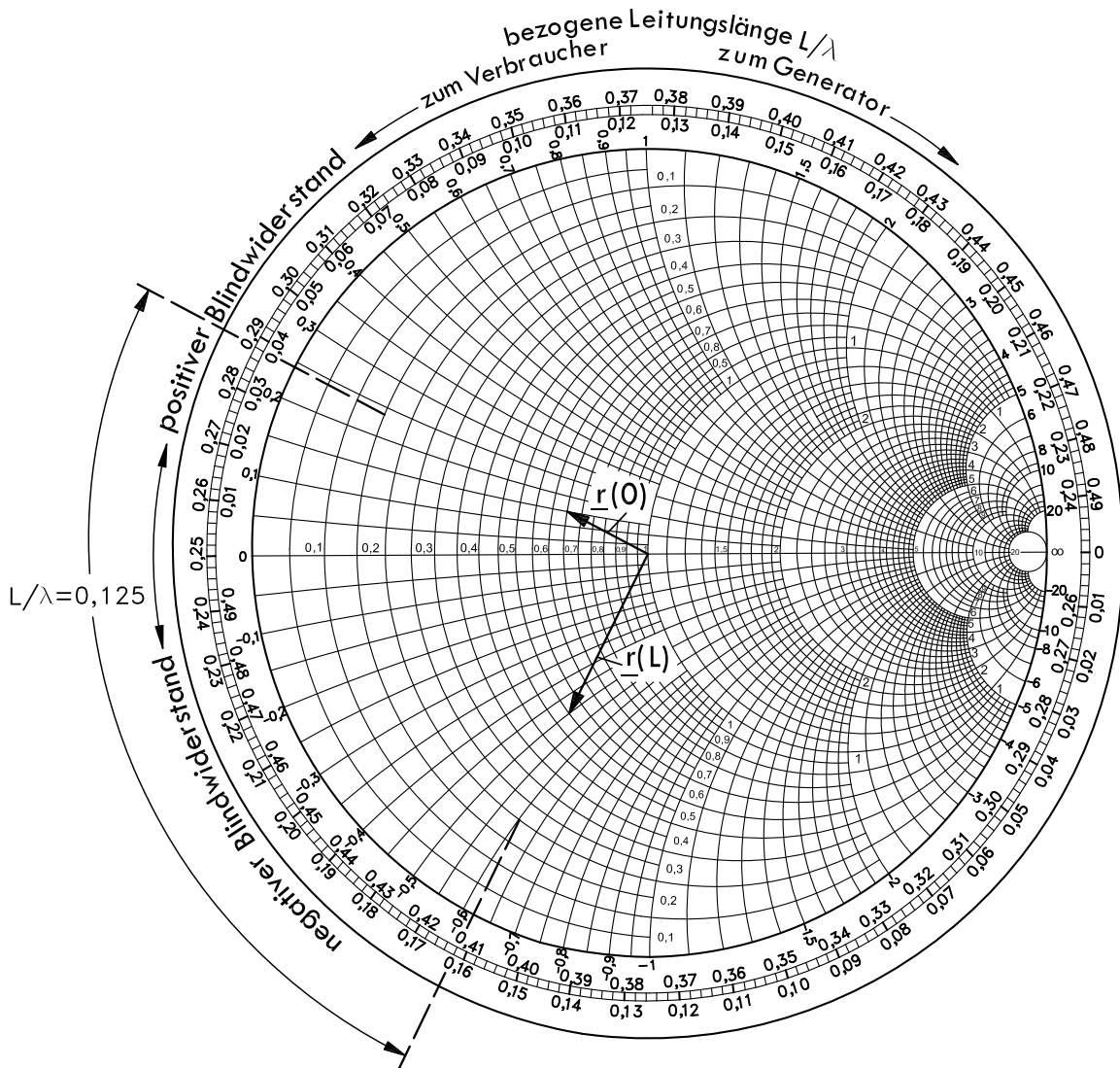


Abb. 7: Smith-Diagramm zum Beispiel 4.1.

1.  $\underline{Z}_e$  bezüglich  $\underline{Z}_{L2}$  normieren
2. Mit Smith-Diagramm die Impedanz  $\underline{Z}_{a2}$  am Anfang von Leitung 2 ermitteln
3. Die Impedanz  $\underline{Z}_{e1}$  am Ende von Leitung 1 ist gegeben durch  $\underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{a2} + \underline{Z}_0$
4.  $\underline{Z}_{e1}$  bezüglich des Leitungswellenwiderstands der Leitung 1,  $\underline{Z}_{L1}$  normieren
5. Mit Smith-Diagramm die Impedanz  $\underline{Z}_a$  bestimmen

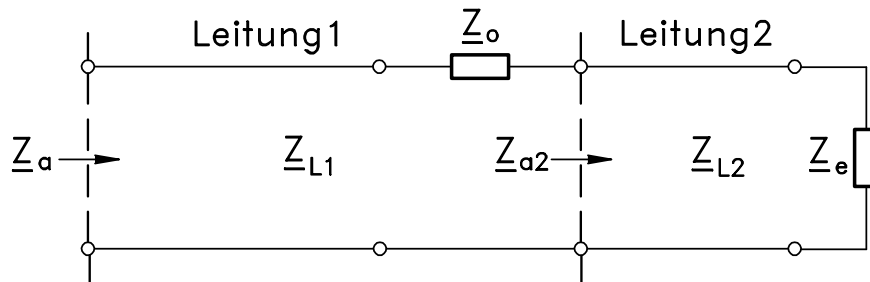


Abb. 8: Leitungsanordnung mit zwei seriell verschalteten Elementen  $\underline{Z}_0$  und  $\underline{Z}_e$ .

## 5 Transformation von Admittanzen mit dem Smith-Diagramm

In den letzten Abschnitten wurde der Reflexionsfaktor  $\underline{r}$  immer bezüglich der normierten Impedanz  $\underline{z}$  betrachtet. Nun soll beschrieben werden, wie das Smith-Diagramm bezüglich der normierten Admittanz  $\underline{y}$  verwendet werden kann. Dazu soll noch einmal die Abbildungsvorschrift für  $\underline{z}$  und analog dazu von  $\underline{y}$  angegeben werden:

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} \quad \text{mit} \quad \underline{z} = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_L}$$

$$-\underline{r} = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_e}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_e} = \frac{\underline{y} - 1}{\underline{y} + 1} \quad \text{mit} \quad \underline{y} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{\underline{z}}$$

Daraus ist ersichtlich, dass sich  $\underline{r}$  zu  $\underline{z}$  verhält, wie  $-\underline{r}$  zu  $\underline{y}$ .

Graphisch lässt sich dieser Zusammenhang durch eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung darstellen.

⇒ Im Smith-Diagramm ist  $\underline{y}$  bei bekannter Impedanz  $\underline{z}$  durch Spiegelung am Ursprung bestimmbar.

### 5.1 Beispiel

Die normierte Impedanz am Ende der Leitung sei  $\underline{z} = 0,15 + j \cdot 0,55$ :

$$\underline{z} = 0,15 + j \cdot 0,55$$

$$\Rightarrow \underline{y} = 0,5 - j \cdot 1,7$$

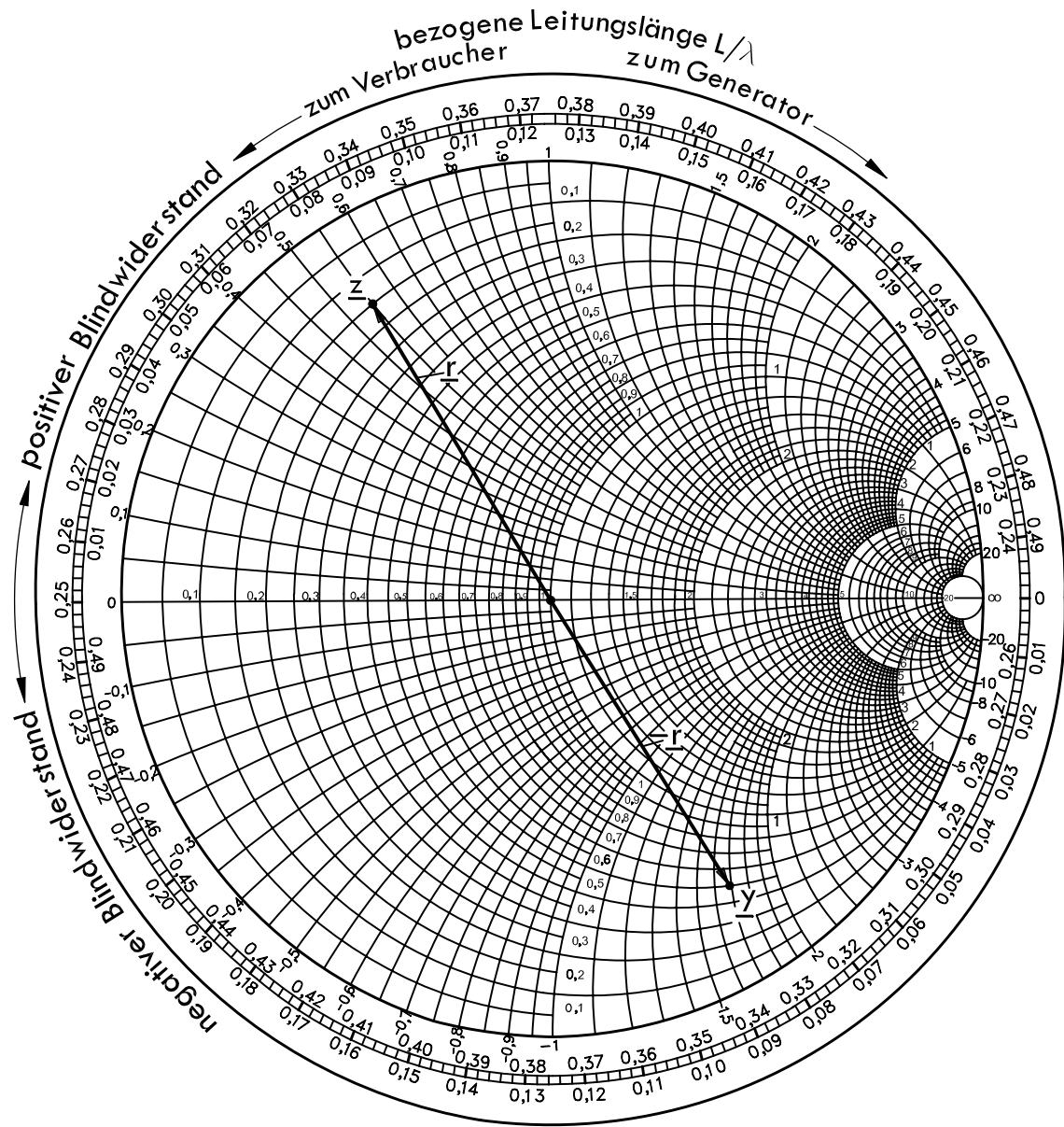


Abb. 9: Smith-Diagramm – Spiegelung am Ursprung zur Transformation von Impedanzen zu Admittanzen und umgekehrt.

Der Vorgang der Spiegelung ist in Abb. 9 dargestellt.

## 5.2 Vorgehensweise bei komplexeren Fragestellungen

Die Transformation von  $\underline{y}$  mit dem Smith-Diagramm erfolgt völlig analog zur Transformation von  $\underline{z}$ . Die Betrachtung der Admittanzen ist zweckmäßig bei Leitungsanordnungen, die parallelgeschaltete Elemente beinhalten, weil sich dann ihre Admittanzen addieren.

### 5.2.1 Beispiel für Analyse mit Admittanzen

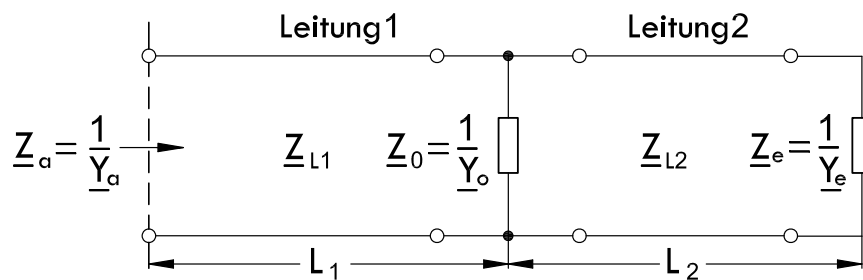


Abb. 10: Leitungsanordnung mit parallelgeschalteten Elementen.

Ein Beispiel für eine Anordnung mit parallel verschalteten Elementen ist in Abb. 10 dargestellt. Wir wollen folgende Annahmen machen. Sie sollten dieses Beispiel selbst bearbeiten.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 0,176 \lambda, & L_2 &= 0,125 \lambda, & \text{verlustfreie Leitungen} \\
 \underline{Z}_{L1} &= \underline{Z}_{L2} = \underline{Z}_L, & \underline{Y}_e &= 0 \text{ (Leerlauf)}, & \underline{Z}_0 &= \underline{Z}_L \\
 \Rightarrow \underline{y}_a &= \underline{Y}_a \cdot \underline{Z}_L = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_a} = 1 - j
 \end{aligned}$$