In den letzten Abschnitten wurden die Hochfrequenzsignale mit Strom- und Spannungsamplituden beschrieben. Da diese Signale elektromagnetische Wellen darstellen, die sich auf Leitungen ausbreiten, kann man sie auch allgemeiner mit Wellenamplituden beschreiben. In dieser Darstellung ist es dann sinnvoller, die Wellenamplituden nicht auf Strom oder Spannung, sondern auf die von der Welle geführte Leistung zu beziehen. Bauelemente lassen sich dann in Form von Streumatrizen charakterisieren, die durch die hinein- und herauslaufenden Wellenamplituden definiert werden, die relativ einfach zu messen sind.

1 Normierte Wellenamplituden

Zuerst wollen wir, ausgehend von Strom- und Spannungsamplituden, das Konzept der *normierten Wellenamplituden* einführen. Diese normierten Wellenamplituden sollen auf die transportierte Leistung bezogen werden. Um die transportierte Leistung auf einer Leitung berechnen zu können, gehen wir von Strom und Spannung auf der Leitung aus:

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \underline{U}_h(z) + \underline{U}_r(z) && (1)\\ \underline{I}(z) &= \frac{\underline{U}_h(z) - \underline{U}_r(z)}{\underline{Z}_L}, && (2) \end{aligned}$$

mit $\underline{U}_h(z) = \underline{U}_1 \exp(-\underline{\gamma} z)$ und $\underline{U}_r(z) = \underline{U}_2 \exp(\underline{\gamma} z)$ für die hin- bzw. rücklaufende Welle. Im Folgenden wollen wir eine verlustfreie Leitung annehmen, so dass der Leitungswellenwiderstand Z_L reell wird:

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_L = Z_L$$

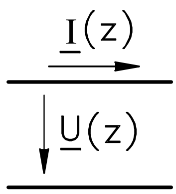

Abb. 1: Beschreibung einer Leitung mit Strom- und Spannungszeigern

Aus den Gl. (1) und (2) lässt sich die transportierte Leitung P in $+z$-Richtung an der Stelle z berechnen:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2}\Re\{\underline{U}(z)\underline{I}^*(z)\}\\ &= \frac{1}{2Z_L}\Re\{|\underline{U}_h(z)|^2 - |\underline{U}_r(z)|^2 + \underbrace{\underline{U}_r\underline{U}_h^* - \underline{U}_h\underline{U}_r^*}_{2j\Im\{\underline{U}_r\underline{U}_h^*\}}\}\\ \Rightarrow P(z) &= \underbrace{\frac{|\underline{U}_h(z)|^2}{2Z_L}}_{\text{hinlaufende Leistung}} - \underbrace{\frac{|\underline{U}_r(z)|^2}{2Z_L}}_{\text{rücklaufende Leistung}} && (3) \end{aligned}$$

Solange der Leitungswellenwiderstand reell ist, besteht die auf der Leitung geführte Leistung also aus einem hinlaufenden Teil, der proportional zu $|\underline{U}_h|^2$ ist, und einem rücklaufenden Teil proportional zu $|\underline{U}_r|^2$. Daher ist es sinnvoll, normierte, leistungsbezogene Wellenamplituden einzuführen, die die hinlaufende und rücklaufende Welle repräsentieren:

$$\underline{a}(z) = \frac{\underline{U}_h(z)}{\sqrt{Z_L}}; \qquad \underline{b}(z) = \frac{\underline{U}_r(z)}{\sqrt{Z_L}}.$$

Die Beschreibung der Leistung vereinfacht sich dann folgendermaßen:

$$P(z) = \frac{1}{2}\{|\underline{a}(z)|^2 - |\underline{b}(z)|^2\}. \tag{4}$$

Spannung und Strom ergeben sich dann aus den Überlagerungen der hin- und rücklaufenden Wellen:

$$\underline{U}(z) = \sqrt{Z_L}\{\underline{a}(z) + \underline{b}(z)\} \tag{5}$$

$$\underline{I}(z) = \frac{1}{\sqrt{Z_L}}\{\underline{a}(z) - \underline{b}(z)\} \tag{6}$$

Die Größen $|\underline{a}(z)|$ und $|\underline{b}(z)|$ lassen sich einfach aus Leistungsmessungen bestimmen.
Der Reflexionsfaktor ergibt sich wie gehabt als Verhältnis der rück- zur hinlaufenden Welle:

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{U}_r(z)}{\underline{U}_h(z)} = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)} \tag{7}$$

2 Beschreibung eines Zweitores mit der Streumatrix

Wir wollen nun basierend auf den normierten Wellenamplituden ein lineares Netzwerk in Form eines Zweitors mit der sog. *Streumatrix* beschreiben.

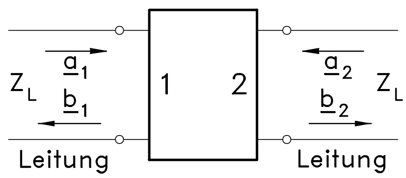

Abb. 2: Beschreibung eines Zweitors.

Die in Abb. 2 dargestellten Größen sind wie folgt definiert:

$\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$	Wellenamplituden, die in das Netzwerk hineinlaufen
$\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$	Wellenamplituden, die aus dem Netzwerk herauslaufen

Die herauslaufenden Wellenamplituden $\underline{b}_1$ und $\underline{b}_2$ lassen sich durch die *Streumatrix* $\underline{\mathbf{S}}$ mit den hineinlaufenden Wellenamplituden $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ verknüpfen:

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Streumatrix } \underline{S}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Hierbei entsprechen die beiden Komponenten $\underline{S}_{11}$ und $\underline{S}_{22}$ den Reflexionsfaktoren bei ausgangs- bzw. eingangsseitiger Anpassung. Die beiden anderen Komponenten $\underline{S}_{21}$ und $\underline{S}_{12}$ beschreiben die Transmission in Hin- bzw. in Rückrichtung.

2.1 Beispiele

Zwei Beispiele sollen die Eigenschaften von Streumatrizen verdeutlichen.

1. **Leitung mit Wellenwiderstand Z_L und Länge L:**
Wenn wir die hin- und rücklaufenden Wellen betrachten, ergibt sich eine Phasendrehung (und Dämpfung) gemäß der Länge der Leitung:

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_1 \exp(-\underline{\gamma} L) \tag{9}$$

$$\underline{b}_1 = \underline{a}_2 \exp(-\underline{\gamma} L) \tag{10}$$

Damit ergibt sich die Streumatrix zu:

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-\underline{\gamma} L) \\ \exp(-\underline{\gamma} L) & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

2. **Serienwiderstand in einer Leitung:**

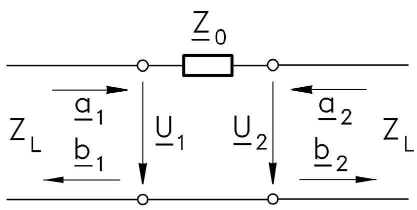

Abb. 3: Serienwiderstand in einer Leitung.

Zuerst betrachten wir den Streuparameter $\underline{S}_{11}$: Bei reflexionsfreiem Abschluss am Tor 2 ergibt sich dort ein Ausgangswiderstand Z_L, womit sich in Abb. 3 ein Eingangswiderstand $\underline{Z}_0 + Z_L$ ergibt. Gemäß Gl. (8) lässt sich schreiben:

$$\underline{S}_{11} = \left.\frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0} = \frac{(\underline{Z}_0 + Z_L) - Z_L}{(\underline{Z}_0 + Z_L) + Z_L} = \frac{\underline{Z}_0}{2Z_L + \underline{Z}_0}$$

Die Schaltung weist eine Symmetrie auf: Sie ist spiegelsymmetrisch, so dass das Verhalten der Schaltung unabhängig davon ist, ob sich die Welle von links nach rechts oder umgekehrt ausbreitet. Der Reflexionsfaktor muss also an beiden Toren gleich sein:

$$\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}.$$

Nun betrachten wir die Transmission:

$$\underline{S}_{21} = \left.\frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0}$$

Dei reflexionsfreiem Abschluss am Tor 2 (ausgedrückt durch $\underline{a}_2 = 0$) ergibt sich in Abb. 3 ein Spannungsteiler:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{Z_L}{\underline{Z}_0 + Z_L} \tag{12}$$

$\underline{U}_1$ beinhaltet dabei die hinlaufende Welle mit $\underline{a}_1$ und die rücklaufende Welle mit $\underline{b}_1$, so dass sich $\underline{U}_1 = \underline{U}_{h,1}(1+\underline{S}_{11})$ schreiben lässt ($\underline{U}_{h1}$ – Spannung der hinlaufenden Welle am Tor 1). Es ergibt sich damit

$$\underline{S}_{21} = \left.\frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2=0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_{h1}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{h1}} = \frac{Z_L}{\underline{Z}_0 + Z_L}(1+\underline{S}_{11}) = \frac{2 \cdot Z_L}{\underline{Z}_0 + 2 \cdot Z_L} \tag{13}$$

Außerdem gilt *Reziprozität*: Die Richtung der Ausbreitung hat keine Auswirkung auf die Ausbreitungseigenschaften. Eine Welle, die sich von Tor 1 nach 2 ausbreitet, erfährt die gleiche Übertragung, wie eine Welle, die sich in entgegengesetzter Richtung ausbreitet. Für die Streumatrix ergibt sich somit:

$$\underline{S}_{21} = \underline{S}_{12}.$$

Die Beziehung $\underline{S}_{21} = \underline{S}_{12}$ gilt bei allen reziproken, auch unsymmetrischen Netzwerken!

3 Signalflussdiagramm

Eine einfache Beschreibung der Wellen ist mit dem *Signalflussdiagramm* möglich. Darin stellt jeder Knoten die Summe der in ihn hineinlaufenden Wellenamplituden dar. Jeder Pfad fordert die Multiplikation mit dem Wert, der dem Pfad zugeordnet ist. Solch ein Signalflussdiagramm ist in Abb. 4 dargestellt.

Wir stellen einen Vierpol mit bekannten Streuparametern im Signalflussdiagramm dar:

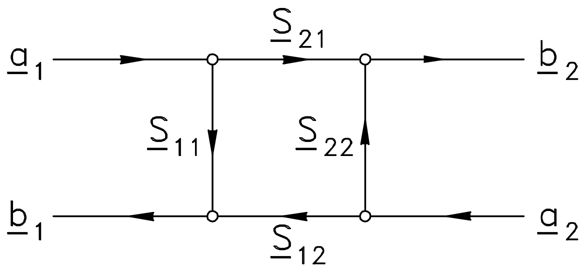

Abb. 4: Signalflussdiagramm eines Zweitors.

Für die beiden herauslaufenden Wellenamplituden des Zweitors bzw. Vierpols ergeben sich demnach folgende Beziehungen:

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{21}\underline{a}_1 + \underline{S}_{22}\underline{a}_2; \qquad \underline{b}_1 = \underline{S}_{11}\underline{a}_1 + \underline{S}_{12}\underline{a}_2$$

Das Signalflussdiagramm für zwei hintereinandergeschaltete Vierpole ist in Abb. 5 dargestellt.

3.1 Beispiel: Beschreibung der Transmission $\underline{S}''_{21}$ durch zwei Vierpole

Wir betrachten beispielhaft die Transmission $\underline{S}''_{21} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1}\Big|_{\underline{a}_2=0}$ in Abb. 5. Als Hilfsgröße führen wir hier die Wellenamplitude $\underline{b}_x$ ein:

$$\underline{b}_x = \underline{a}_1 \cdot \underline{S}_{21} + \underline{b}_x \underline{S}'_{11} \cdot \underline{S}_{22} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{b}_x = \underline{a}_1 \frac{\underline{S}_{21}}{1 - \underline{S}'_{11}\underline{S}_{22}}$$

Es ergibt sich dann für $\underline{b}_2$:

$$\underline{b}_2 = \underline{S}'_{21} \cdot \underline{b}_x = \underline{a}_1 \frac{\underline{S}_{21}\underline{S}'_{21}}{1 - \underline{S}'_{11}\underline{S}_{22}},$$

woraus dann für $\underline{S}''_{21} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1}\Big|_{\underline{a}_2=0}$ folgt:

$$\underline{S}''_{21} = \frac{\underline{S}_{21}\underline{S}'_{21}}{1 - \underline{S}'_{11}\underline{S}_{22}}$$

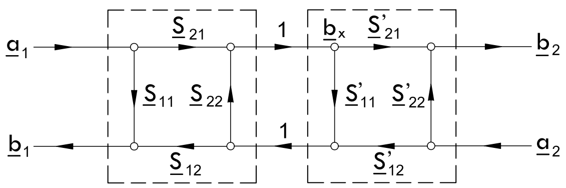

Abb. 5: Signalflussdiagramm zwei hinter einander geschalteter Zweitore.