

1 Vorbetrachtung

Die hinlaufende Welle auf einer Leitung kann man gemäß Kapitel LEI folgendermaßen darstellen:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_1 \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z) \quad (1)$$

$$\underline{U}_1 = \hat{U}_1 \exp(j\psi_1) \quad (2)$$

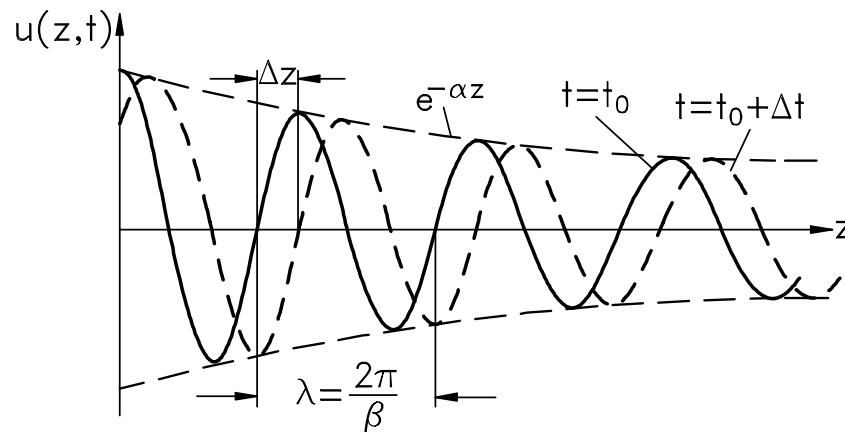


Abb. 1: Die Spannung $u(z, t)$ für feste Zeitpunkte $t = t_0$ und $t = t_0 + \Delta t$ entlang der Leitung für eine hinlaufende Welle.

Daraus ergibt sich die Spannungsverteilung im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} u_h(z, t) &= \Re\{\underline{U}_h \exp(j\omega t)\} \\ &= \hat{U}_1 \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \beta \cdot z + \psi_1) \end{aligned} \quad (3)$$

Die sich so ergebende Spannungsverteilung entlang der Leitung ist in Abb. 1 für zwei Zeitpunkte $t = t_0$ und $t = t_0 + \Delta t$ dargestellt. Sie repräsentiert eine gedämpfte Schwingung. In Ausbreitungsrichtung hat die Welle ein periodisches Verhalten, wobei die Periode λ der Wellenlänge entspricht mit:

$$\beta \cdot \lambda = 2\pi \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4)$$

1.1 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle muss man zwei Geschwindigkeiten unterscheiden:

1. Phasengeschwindigkeit:

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Phase $\psi = \omega t - \beta z + \psi_1$ kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen als die Geschwindigkeit der Phase $\psi = \pi/2$. Diese Annahme entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Nulldurchgänge des Signals in Abb. 1 entsprechend $v_{ph} = \Delta z / \Delta t$. Zunächst gilt:

$$\frac{\pi}{2} \stackrel{!}{=} \psi = \omega t - \beta z + \psi_1 \quad (5)$$

Aus der Ableitung von Gl. 5 nach der Zeit ergibt sich die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{dz}{dt}$:

$$\omega - \beta \frac{dz}{dt} = 0 = \omega - \beta \cdot v_{ph}, \quad (6)$$

woraus:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} \quad (7)$$

folgt. Für verlustarme Wellenleiter gilt mit Gl. (LEI 29) $v_{ph} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$.

2. Gruppengeschwindigkeit:

Die Ausbreitung von Pulsen auf einer Leitung wird durch die Gruppengeschwindigkeit beschrieben. Pulse sind keine harmonischen Signale mehr, sondern bestehen aus mehreren Frequenzkomponenten. Sie lassen sich allerdings aus einer Überlagerung von harmonischen Signalen zusammensetzen.

Betrachtet man im einfachsten Fall die Überlagerung zweier harmonischer Signale mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 mit gleicher Amplitude \hat{U}_1 und der Annahme verschwindender Verluste ($\alpha = 0$), gilt:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \hat{U}_1 \{ \cos(\omega_1 t - \beta_1 z) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 z) \} \\ &= 2\hat{U}_1 \underbrace{\cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} z \right]}_{\text{Einhüllende}} \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} z \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Für einen festen Zeitpunkt ist $u(z, t)|_{t=\text{konst}}$ in Abb. 2 dargestellt.

Die Gruppengeschwindigkeit entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden:

$$v_{gr} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2} \quad (9)$$

Für den Übergang zu sehr kleinen Frequenzabständen $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$ wird daraus:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (10)$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} gibt auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der transportierten Leistung an und ist somit i.A. kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Wenn sich die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit unterscheiden, sprechen wir von *dispersiver* Wellenausbreitung, d.h.:

$$\text{Dispersion} \hat{=} v_{ph} \neq v_{gr} \quad (11)$$

1.2 Beispiele

1. Verlustarme Leitung mit β nach Gl. (LEI 28):

$$\frac{1}{v_{gr}} = \frac{d \left(\frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{c_0} \right)}{d\omega} = \underbrace{\frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c_0}}_{\frac{1}{v_{ph}}} + \underbrace{\frac{\omega}{c_0} \frac{d\sqrt{\epsilon_r}}{d\omega}}_{\text{Dispersionsanteil}} \quad (12)$$

Der Dispersionsanteil ist bei einer verlustarmen Leitung i.A. sehr klein.

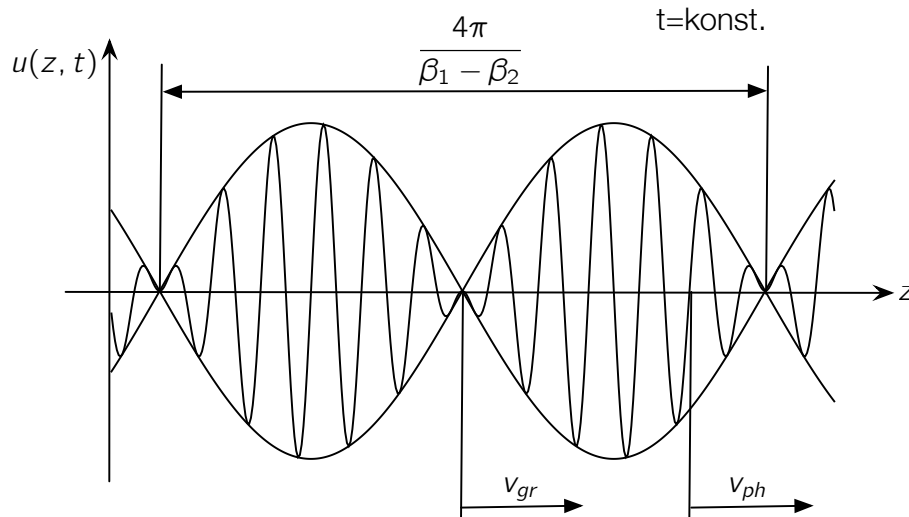


Abb. 2: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei der Ausbreitung einer Schwingung.

2. **Leitung bei kleinen Frequenzen** $R' \gg \omega L'$ und $G' = 0$:

Es ergibt sich dann mit Gl. (LEI 10) für

$$\underline{\gamma} = \sqrt{R'j\omega C'}$$

und damit

$$\begin{aligned} \beta &= \Im \left\{ \sqrt{j\omega C' R'} \right\} = \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} \\ \Rightarrow v_{ph} &= \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{R' C'}} \\ \Rightarrow v_{gr} &= \frac{d\omega}{d\beta} = \sqrt{\frac{8\omega}{R' C'}} = 2 \cdot v_{ph} \end{aligned}$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist dann doppelt so groß wie die Phasengeschwindigkeit.

Wegen $v_{gr} \neq v_{ph}$ erhalten wir eine hohe Dispersion.

2 Reflexion am Leitungsende

Wir betrachten eine Leitung mit einem Abschlusswiderstand \underline{Z}_e . Anschaulich kann man sich vorstellen, dass die hinlaufende Welle am Abschlusswiderstand reflektiert wird und z.T. wieder zum Anfang der Leitung zurückläuft, wie Abb. 3 für einen festen Zeitpunkt zeigt.

Der Spannungs- und Stromverlauf auf der Leitung ist darstellbar durch die Gl. (LEI 12) und (LEI 13):

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h(z) + \underline{U}_r(z) \quad (13)$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_h(z) + \underline{I}_r(z) = \frac{\underline{U}_h(z)}{\underline{Z}_L} - \frac{\underline{U}_r(z)}{\underline{Z}_L} \quad (14)$$

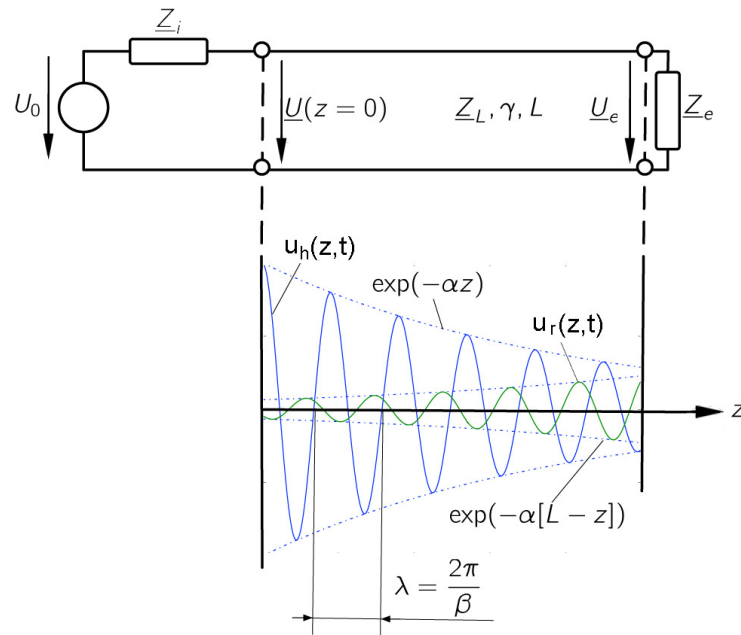


Abb. 3: Ausbreitung einer Wechsellspannung auf einer Leitung mit beliebigem Abschlusswiderstand: Die hin- und rücklaufende Welle bestimmen Strom- und Spannungsverlauf entlang der Leitung.

Das Verhältnis von Spannung zu Strom am Ende der Leitung ($z = L$) ist durch den Abschlusswiderstand festgelegt. Es gilt:

$$\frac{\underline{U}(L)}{\underline{I}(L)} = \underline{Z}_e = \underline{Z}_L \frac{\underline{U}_h(L) + \underline{U}_r(L)}{\underline{U}_h(L) - \underline{U}_r(L)} \quad (15)$$

Man kann nun einen Reflexionsfaktor einführen, der diese reflektierte Wellenamplitude am Leitungsende zu der hinlaufenden Wellenamplitude in Beziehung setzt:

$$\underline{r}(L) = \frac{\underline{U}_r(L)}{\underline{U}_h(L)} \quad (16)$$

Gl. 16 lässt sich nun in Gl. 15 einsetzen:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_L \frac{1 + \underline{r}(L)}{1 - \underline{r}(L)}, \quad (17)$$

woraus man den Reflexionsfaktor erhält:

$$\Rightarrow \underline{r} = \underline{r}(L) = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_L} \quad (18)$$

Der Reflexionsfaktor kann sowohl durch das Verhältnis der Spannungen von hin- und rücklaufender Welle als auch durch deren Ströme beschrieben werden:

$$\frac{\underline{U}_r(L)}{\underline{U}_h(L)} = \underline{r}; \quad \frac{\underline{I}_r(L)}{\underline{I}_h(L)} = -\underline{r} \quad (19)$$

2.1 Beispiele

1. **Anpassung:** $\underline{Z}_e = \underline{Z}_L$

Es ergibt sich

$$\underline{r} = 0 \quad (20)$$

Die hinlaufende Welle läuft somit in den Abschlusswiderstand hinein, ohne dass eine reflektierte Welle entsteht.

2. **Kurzschluss:** $\underline{Z}_e = 0$

Es ergibt sich mit Gl. 18:

$$\underline{r} = \frac{-\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L} = -1. \quad (21)$$

Die Spannung am Ende der Leitung wird zu Null erzwungen. Die hinlaufende Welle wird damit vollständig am Leitungsende reflektiert, d.h. die gesamte Energie der Welle läuft wieder zurück.

3. **Leerlauf:** $\underline{Z}_e \rightarrow \infty$

Es ergibt sich mit Gl. 18:

$$\underline{r} = +1 \quad (22)$$

Der Strom wird am Ende der Leitung zu Null erzwungen. Die Welle wird auch vollständig reflektiert, so dass die gesamte Energie der Welle wieder zurückläuft.

4. **reaktiver Abschluss:** $\underline{Z}_e = jX$, z.B. $jX = j\omega L$ oder $jX = \frac{1}{j\omega C}$

Mit Gl. 18 ergibt sich:

$$\underline{r} = \frac{jX - \underline{Z}_L}{jX + \underline{Z}_L} \quad (23)$$

Für reellen Leitungswellenwiderstand Z_L gilt dann: $\underline{r} = \exp(j\psi)$ mit $\psi = 2 \cdot \arctan\left(\frac{Z_L}{X}\right)$.

D.h. die Welle wird auch dann vollständig reflektiert: $|\underline{r}| = 1$, aber mit einer Phasendrehung ψ .

3 Reflexionsfaktor an beliebiger Stelle z auf der Leitung

Die hinlaufende Wellenamplitude lässt sich auch auf das Leitungsende beziehen:

$$\underline{U}_h(z) = \underline{U}_1 \exp(-\underline{\gamma}z) = \underline{U}_h(L) \exp[\underline{\gamma}(L - z)] \quad (24)$$

In derselben Art kann man die rücklaufende Welle beschreiben:

$$\underline{U}_r(z) = \underline{U}_2 \exp(\underline{\gamma}z) = \underline{U}_r(L) \exp[-\underline{\gamma}(L - z)] \quad (25)$$

Damit ergibt sich der effektive Reflexionsfaktor an der Stelle z (nicht mehr am Leitungsende):

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{U}_r(z)}{\underline{U}_h(z)} = \frac{\underline{U}_r(L)}{\underline{U}_h(L)} \exp[-2\underline{\gamma}(L - z)] = \underline{r}(L) \cdot \exp[-2\underline{\gamma}(L - z)] \quad (26)$$

Der Reflexionsfaktor an einer beliebigen Stelle z hängt damit in einfacher Weise mit dem Reflexionsfaktor am Ende der Leitung zusammen.

Wenn man in der Ausbreitungskonstanten $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ die Dämpfungs- und die Phasenkonstante jeweils getrennt berücksichtigt, erhält man für den Spannungsverlauf:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h(L) \exp[\alpha(L-z)] \exp[j\beta(L-z)] + \underline{U}_r(L) \exp[-\alpha(L-z)] \exp[-j\beta(L-z)] \quad (27)$$

In gleicher Art und Weise beschreibt man den Stromverlauf:

$$\underline{Z}_L \cdot \underline{I}(z) = \underline{U}_h(L) \exp[\alpha(L-z)] \exp[j\beta(L-z)] - \underline{U}_r(L) \exp[-\alpha(L-z)] \exp[-j\beta(L-z)] \quad (28)$$

In Abb. 4 ist der Verlauf der Strom- und Spannungsamplituden $|\underline{I}|$ und $|\underline{U}|$ einer verlustbehafteten Leitung im Falle eines Kurzschlusses am Ende der Leitung dargestellt.

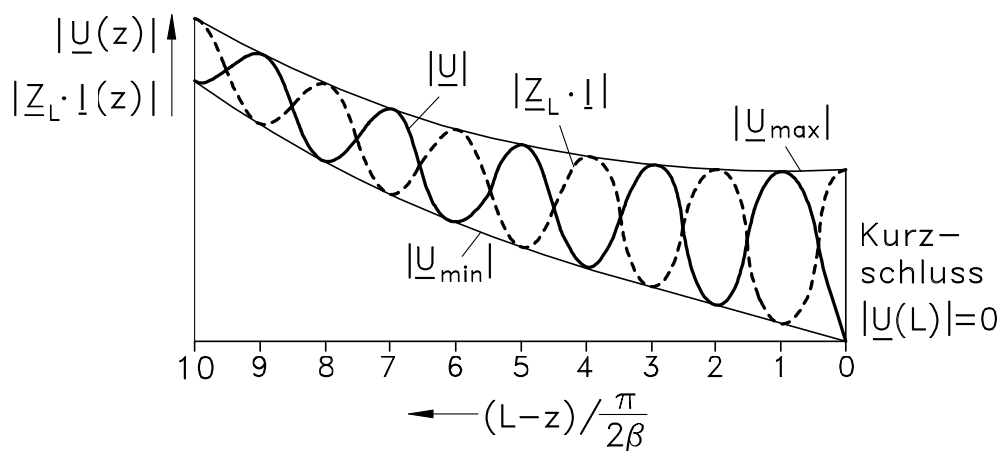


Abb. 4: Die Beträge des Spannungs- und Stromzeigers schwanken entlang der Leitung zwischen zwei Hüllkurven.

Das Verhältnis aus den beiden Einhüllenden $s = \frac{|U_{max}|}{|U_{min}|}$ nennt man *Stehwellenverhältnis* s (engl. *standing wave ratio, SWR*) oder *Welligkeit*.

U_{max} ergibt sich bei Übereinstimmung der Phase von hin- und rücklaufender Welle \underline{U}_h und \underline{U}_r :

$$|U_{max}| = |U_h| + |U_r| = |U_h|(1 + |r(z)|) \quad (29)$$

U_{min} ergibt sich bei entgegengesetzter Phase:

$$|U_{min}| = |U_h| - |U_r| = |U_h|(1 - |r(z)|) \quad (30)$$

Somit kann man für das Stehwellenverhältnis allgemein schreiben:

$$s = \frac{1 + |r(z)|}{1 - |r(z)|} \quad (31)$$

D.h. bei reflexionsfreiem Abschluss $r = 0$ erhält man eine Welligkeit von $s = 1$, ist die Reflexion jedoch maximal, also z.B. $r = 1$, ergibt sich eine Welligkeit von $s \rightarrow \infty$.

Der Betrag des Reflexionsfaktors hängt nur vom Betrag des Reflexionsfaktors am Ende der Leitung $\underline{r}(L)$ und der Dämpfungskonstanten α der Leitung ab (siehe auch Gl. 26):

$$|\underline{r}(z)| = |\underline{r}(L)| \exp[-2\alpha(L - z)] \quad (32)$$

Daraus ergibt sich, dass bei verlustbehafteten Leitungen zum Generator hin ($z \rightarrow 0$) der Betrag des Reflexionsfaktors $|\underline{r}(z)|$ kleiner wird, und die Welligkeit dem Wert $s \rightarrow 1$ entgegenstrebt.

Bei verlustfreien Leitungen ($\alpha = 0$) wird $|\underline{r}(z)|$ und damit die Welligkeit unabhängig vom Ort z .

3.1 Beispiele

1. **Annahme $\underline{r}(L) = -\frac{1}{2}$, verlustbehaftete Leitung mit $\alpha \neq 0$:**

Die Gl. (27) und (28) lassen sich grafisch veranschaulichen, siehe dazu Abb. 5. Hier ist der Spannungszeiger entlang einer Leitung mit $L = \lambda$ dargestellt.

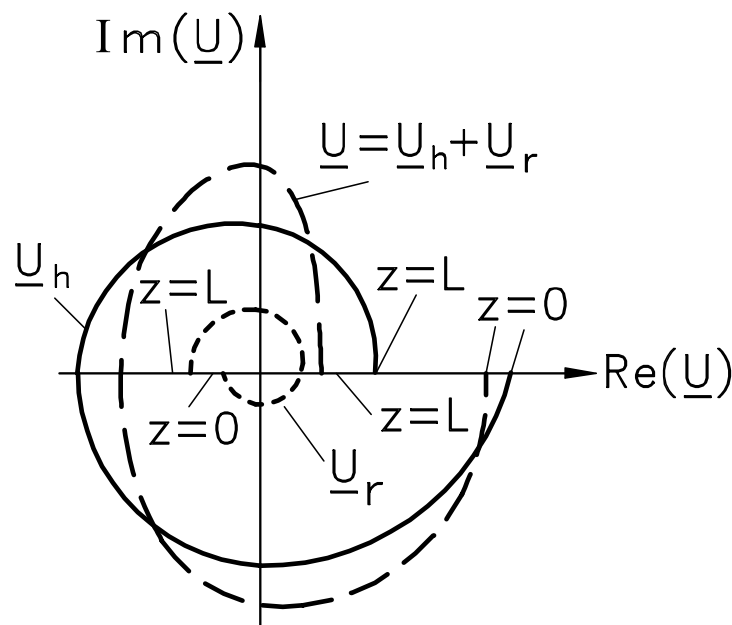


Abb. 5: Wellenausbreitung entlang einer verlustbehafteten Leitung mit $L = \lambda$ und $\underline{r}(L) = -\frac{1}{2}$.

2. **Leerlauf am Ende der Leitung, $\underline{r}(L) = +1$, keine Verluste, $\alpha = 0$, und damit $\underline{Z}_L = Z_L$ reell:**
Es ergibt sich unter o.g. Annahmen gemäß Gl. 27 folgender Spannungsverlauf $\underline{U}(z)$:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h(z=L)[\exp[j\beta(L-z)] + \exp[-j\beta(L-z)]] \quad (33)$$

$$\underline{U}(z) = 2\underline{U}_h(z=L) \cos[\beta(L-z)] \quad (34)$$

Für $\beta(L-z) \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots\}$, ergeben sich Spannungsmaxima bzw. -bäuche.

Spannungsknoten ($\underline{U}(z) = 0$) ergeben sich für $\beta(L-z) \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \dots\}$.

Dieser Spannungsverlauf ist in Abb. 6 dargestellt. Den Stromverlauf kann man analog beschreiben:

$$I(z) = \frac{Z_h(z=L)}{Z_L} \{ \exp[j\beta(L-z)] - \exp[-j\beta(L-z)] \} \quad (35)$$

$$I(z) = \frac{2jU_h(z=L)}{Z_L} \sin[\beta(L-z)] \quad (36)$$

- *Strom und Spannung sind um 90° gegeneinander zeitlich verschoben (siehe Abb. 6).*
- *An der Stelle der Spannungsbäuche entstehen Stromknoten, und bei den Spannungsknoten entstehen Strombäuche.*

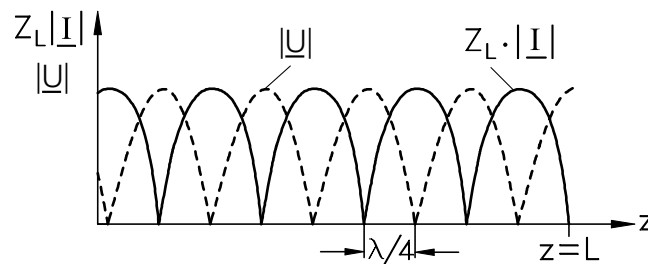


Abb. 6: Bei einem Leerlauf am Ende der verlustlosen Leitung bilden sich stehende Wellen. Strom und Spannung sind gegeneinander um 90° oder $\Delta z = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4}$ phasenverschoben.