

## 1 Einleitung

Bei Filtern handelt es sich um lineare (und zeitinvariante) Netzwerke, mit denen bestimmte Frequenzbereiche eines Eingangssignals herausgefiltert werden. Man unterscheidet so beispielsweise zwischen Tiefpässen (Transmission nur bei tiefen Frequenzen), Hochpässen (Transmission nur bei hohen Frequenzen), Bandpässen (Transmission nur in einem vorgegebenen Frequenzbereich) und Bandsperren (Transmission nur ausserhalb eines vorgegebenen Frequenzbereichs).

Das Filternetzwerk sei verlustfrei und reziprok. Die Quelle habe einen reellen Innenwiderstand  $R_1$  und wir betrachten eine ebenfalls reelle Last  $R_2$  gemäß Abb. 1.

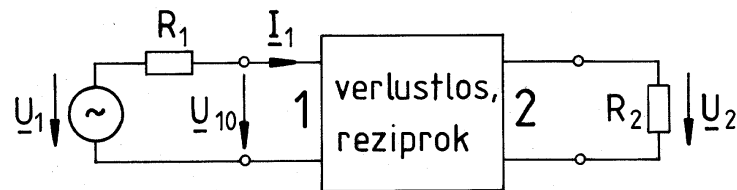


Abb. 1: Anordnung eines verlustlosen Filters.

Die Betriebsdämpfungsfunktion  $\underline{H}(s)$  in Abhängigkeit der komplexen Frequenz  $s$  ( $s = j\omega$  für reelle Frequenzen  $\omega$ ) ergibt sich als

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\underline{H}(s)} \sqrt{\frac{R_2}{4R_1}} \quad (1)$$

$|\underline{H}(j\omega)|^2$  charakterisiert dabei die Leistungsübertragung

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{\text{verfügbare Leistung der Quelle}}{\text{abgegebene Leistung an der Last}} = \frac{|\underline{U}_1|^2 / (8R_1)}{|\underline{U}_2|^2 / (2R_2)} > 1. \quad (2)$$

Die Dämpfung des Filters wird normalerweise in dB angegeben mit dem Betriebsdämpfungsmaß

$$a_b(\omega) = 20 \cdot \lg |\underline{H}(j\omega)| \text{ dB}. \quad (3)$$

Das Filternetzwerk in Abb. 1 lässt sich auch mit Streuparametern beschreiben, was besonders einfach wird, wenn man den Eingang (Tor 1) auf eine Leitung mit dem Wellenwiderstand  $R_1$  und den Ausgang (Tor 2) auf eine Leitung mit dem Wellenwiderstand  $R_2$  bezieht. Der Ausgang ist dann angepasst, so dass sich dort nur eine hinauslaufende Wellenamplitude  $\underline{b}_2$  ergibt, während am Eingang das Signal durchaus reflektiert werden kann, so dass sowohl  $\underline{I}_1$  als auch  $\underline{U}_{10}$  hin- und rücklaufende Strom- bzw. Spannungskomponenten beinhalten:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{h1} + \underline{U}_{r1} \quad (4)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{h1} + \underline{I}_{r1} = \frac{1}{R_1} (\underline{U}_{h1} - \underline{U}_{r1}) \quad (5)$$

Somit gilt:

$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{10} = 2\underline{U}_{h1} \quad (6)$$

Der Streuparameter  $\underline{S}_{21}$  ergibt sich somit

$$\underline{S}_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{U_2/\sqrt{R_2}}{U_{h1}/\sqrt{R_1}} = \frac{U_2}{U_1} \sqrt{\frac{4R_1}{R_2}} = \frac{1}{\underline{H}(j\omega)} \quad (7)$$

und wegen der Reziprozität auch  $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21} = 1/\underline{H}(j\omega)$ .

Unter Ausnutzung der Verlustfreiheit des Netzwerkes (Unitarität der Streumatrix) gilt für den Eigenreflexionskoeffizienten

$$\rho = |\underline{S}_{11}| = |\underline{S}_{22}| = \sqrt{1 - |\underline{S}_{21}|^2} = \frac{1}{|\underline{H}(j\omega)|} \sqrt{|\underline{H}(j\omega)|^2 - 1} \quad (8)$$

Es ist häufig auch die Gruppenlaufzeit  $\tau_g$  durch ein Filter von Interesse. Sie ist mit

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \exp(j\varphi(\omega)) \quad (9)$$

durch

$$\tau_g = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (10)$$

gegeben.

## 2 Realisierung von LC-Tiefpässen

Die Übertragungsfunktion  $1/\underline{H}(s)$  lässt sich als Quotient eines Zähler- und eines Nennerpolynoms schreiben, die durch ihre jeweiligen Nullstellen in der komplexen  $s$ -Ebene charakterisiert werden (siehe auch Vorlesung „Signale und Systeme“).

Für einige Tiefpassfilter (z.B. Potenz- bzw. Butterworth, Tschebyscheff- oder Bessel-Thomson-Tiefpässe) wird die Übertragungsfunktion nur durch ein Nennerpolynom beschrieben, so dass sich dann die Betriebsdämpfungsfunktion  $\underline{H}(s)$  schreiben lässt als

$$\underline{H}(s) = C \prod_{n=1}^N (s - s_{xn}), \quad (11)$$

wobei  $N$  die Ordnung des Polynoms und damit des Filters angibt.  $C$  ist eine Konstante. Die Nullstellen  $s_{xn}$  von  $\underline{H}(s)$  (die Polstellen der Übertragungsfunktion  $1/\underline{H}(s)$ ) liegen dabei in der linken  $s$ -Halbebene (d.h.  $\text{Re}(s_{xn}) < 0$ ) und sind entweder rein reell oder paarweise konjugiert komplex (siehe Vorlesung „Signale, Netzwerke und Systeme“). Mögliche Realisierungen eines LC-Tiefpassfilters mit  $\underline{H}(s)$  gemäß Gl.(11) zeigt Abb. 2, wobei  $N$  die Anzahl der benötigten Reaktanzen angibt. Die Tore 1 und 2 wären wie in Abb. 1 mit der Signalquelle bzw. der Last zu verbinden.

Offensichtlich wirken die Schaltungen in Abb. 2 als Tiefpässe, denn mit zunehmender Frequenz nimmt sowohl der Blindwiderstand der Serieninduktivitäten als auch der Blindleitwert der Querkapazitäten zu. Die genaue Wahl der Kapazitäten bzw. Induktivitäten hängt von den gewünschten Polstellen  $s_{xn}$  in Gl.(11) ab.

In Abb. 3 sind die Dämpfungsverläufe verschiedener Tiefpässe der Ordnung  $N = 5$  dargestellt, wobei der Potenztiefpass (auch bezeichnet als Butterworth-Tiefpass) und der Tschebyscheff-Tiefpass durch Gl.(11) dargestellt und gemäß Abb. 2 realisiert werden. Für diese Tiefpässe gilt bei hohen Frequenzen ( $|s| \gg |s_{xn}|$ ) nach Gl.(11):

$$|\underline{H}(j\omega)| \sim \omega^N, \quad (12)$$

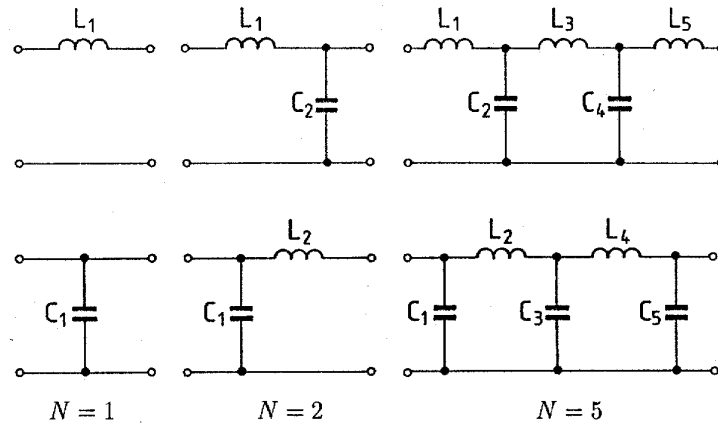


Abb. 2: Mögliche Tiefpässe verschiedener Ordnung  $N$ .

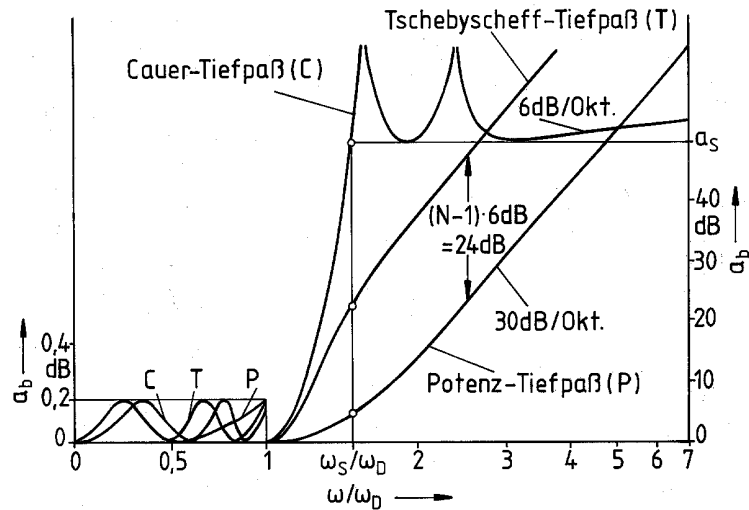


Abb. 3: Betriebsdämpfung verschiedener Filter der Ordnung  $N = 5$ .

was einem Dämpfungsanstieg bei hohen Frequenzen von  $N \cdot 6\text{dB/Oktave}$  entspricht.

Für die Tiefpass-Realisierung sind verschiedene Optimierungsstrategien möglich. Beim Potenz- bzw. Butterworth-Tiefpass wird die Forderung nach maximal flachem Dämpfungsverlauf gestellt, der durch

$$|H(j\omega)|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_G}\right)^{2N} \tag{13}$$

gegeben ist ( $\omega_G$  - 3 dB Grenzfrequenz) und sich dadurch auszeichnet, dass

$$\frac{d^n}{d\omega^n} \left( |H(j\omega)|^2 \right) \Big|_{\omega=0} = 0 \text{ für } n < 2N \tag{14}$$

und damit alle Ableitungen bis zur Ordnung  $(2N - 1)$  bei  $\omega = 0$  verschwinden. Der Dämpfungsverlauf des Potenzfilters in Abb. 3 entspricht genau Gl.(13) mit  $N = 5$ .

Die zur Realisierung des Potenzfilters gemäß Gl.(13) sich ergebenden Pole  $s_{xn}$  (Nullstellen von  $\underline{H}(s)$  in Gl.(11)) liegen in der komplexen  $s$ -Ebene auf einem Halbkreis mit dem Radius  $\omega_G$  gemäß (siehe „Signale und Systeme“)

$$s_{xn} = \omega_G \exp\left(j\pi \frac{N+2n-1}{2N}\right); \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Die in Abb. 3 eingeführte Durchlaßgrenzfrequenz  $\omega_D$  bezeichnet die Frequenz, unterhalb derer die Dämpfung einen vorgegebenen Wert, in Abb. 3 0,1773 dB (entspricht mit Gl.(3), (7) einem  $\rho = 0,2$ ) nicht überschreitet. Eine Realisierung als Tschebyscheff-Tiefpass (dort ist  $|\underline{H}(j\omega)|^2 = 1 + \delta \cdot T_N^2(\omega/\omega_D)$ ,  $\delta$  - Konstante,  $T_N(x)$  - Tschebyscheff-Polynom der Ordnung  $N$ ) lässt im Durchlaßbereich eine Oszillation der Betriebsdämpfung im vorgegebenen Toleranzbereich zu, wodurch ein steilerer Übergang zum Sperrbereich erzielt wird. Ein noch steilerer Übergang vom Durchlaß- zum Sperrbereich wird erzielt, wenn die Betriebsdämpfungsfunktion  $\underline{H}(s)$  zusätzlich zu den Nullstellen  $s_{xn}$  noch Pole (Nullstellen der Übertragungsfunktion  $1/\underline{H}(s)$ ) enthält. Man gelangt dann beispielsweise zum Cauer-Tiefpass. Die Pole im Dämpfungsverlauf entstehen, wenn in Abb. 2 Induktivitäten durch Parallelschwingkreise oder Kapazitäten durch Serienschwingkreise ersetzt werden.

Für eine Tiefpass-Anordnung nach Abb. 2 (oder ähnlich) lässt sich die Betriebsdämpfung berechnen, wobei die Kapazitäten und Induktivitäten so gewählt werden müssen, dass die gewünschten Pole und Nullstellen entstehen. Ergebnisse derartiger Rechnungen sind in Filterhandbüchern enthalten, wobei beispielsweise die Realisierung eines Filters 5. Ordnung mit einer maximalen Dämpfung von 0,1773 dB im Durchlaßbereich ( $\rho = 0,2$ ) Abb. 4 entnommen werden kann (aus R. Saal, Handbuch zum Filterentwurf, AEG-Telefunken, 1979).

Abb. 4 zeigt die Tiefpassrealisierung in normierter Darstellung.  $\Omega$  ist die normierte Frequenz

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B} \quad (16)$$

mit der Bezugsfrequenz  $\omega_B$ , wobei hier  $\omega_B = \omega_D$  mit der Dämpfungsgrenzfrequenz  $\omega_D$  gilt. Entsprechend gilt für die normierte komplexe Frequenz  $p = s/\omega_B$ , und damit sind die Nullstellen  $s_{xn}$  von  $\underline{H}(s)$  (Polstellen der Übertragungsfunktion) durch  $s_x = \omega_B(\alpha_\nu \pm j\beta_\nu)$  gegeben.

Die Bauelemente-Dimensionierung bezieht sich auf gleiche Widerstände am Ein- und Ausgang  $R_1 = R_2$  ( $r_1 = r_2$ ) bzw. einer Speisung mit idealer Stromquelle ( $r_1 \rightarrow \infty$  bzw.  $R_1 \rightarrow \infty$ ) oder idealer Spannungsquelle ( $r'_1 = 0$  bzw.  $R'_1 = 0$ ). Die Realisierungen **A**) und **B**) entsprechen einander (siehe auch obere und untere Beschriftungszeile in Abb. 4). Die angegebenen Induktivitäten und Kapazitäten sind normiert,  $l = \omega_B L/R$ ,  $c = \omega_B RC$  mit dem aktuellen Abschlusswiderstand  $R$ , so dass sich die aktuellen Induktivitäten bzw. Kapazitäten ergeben zu

$$L_\mu = \frac{l_\mu R}{\omega_B}, \quad C_\mu = \frac{c_\mu}{\omega_B R} \quad (17)$$

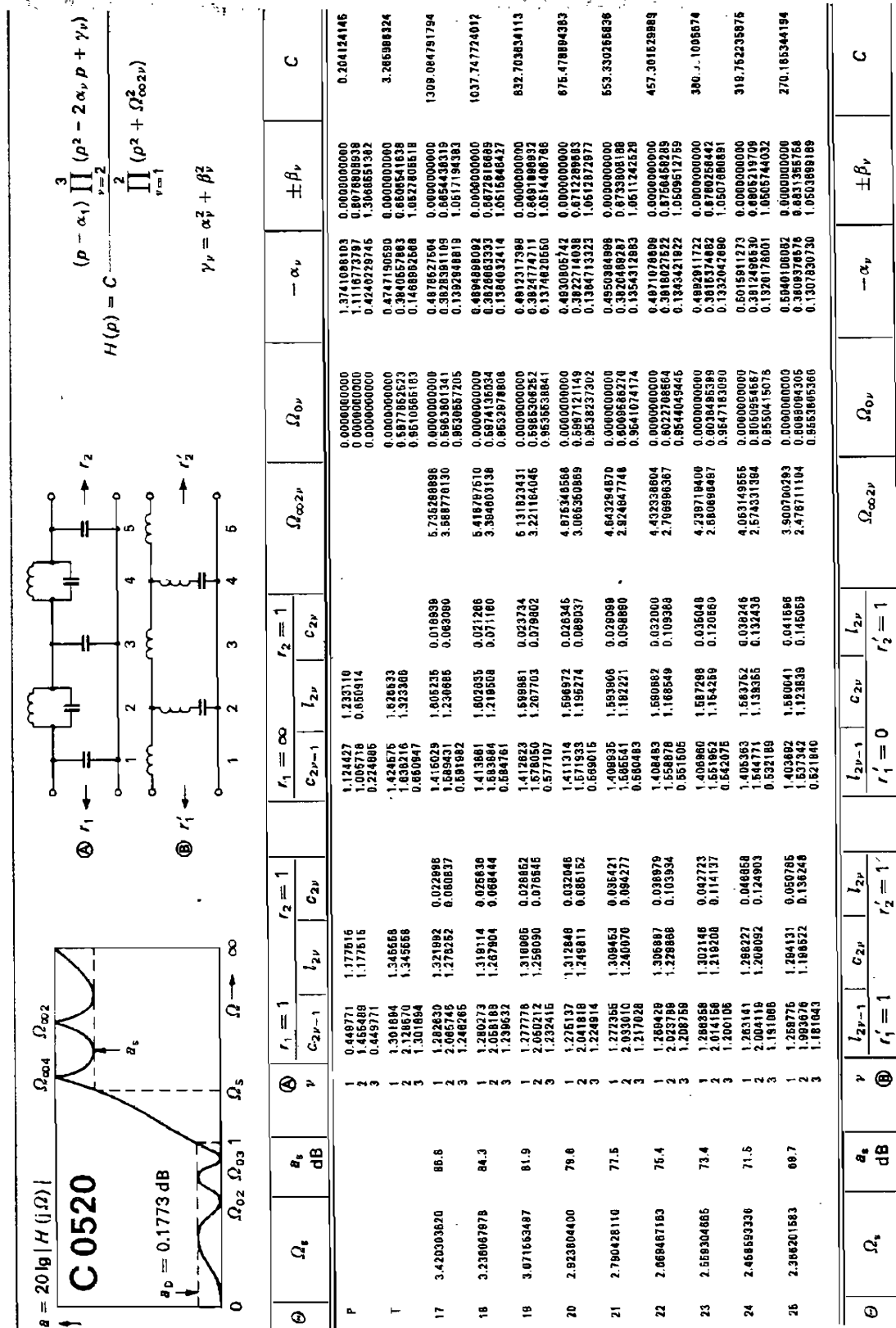


Abb. 4: Realisierung von Tiefpassfiltern 5. Ordnung als P : Potenz- oder Butterworth-Tiefpass oder T : Tschebyscheff-Tiefpass. Θ = 17 ... 25: Cauer-Tiefpässe unterschiedlicher Sperrdämpfung.

*Beispiel:* Ein Tschebyscheff-Tiefpassfilter ( $N = 5$ ) mit der Grenzfrequenz  $f_D = \omega_D/2\pi = 10\text{MHz}$  und  $\rho < 0.2$  für  $f < f_D$  sei mit der unten in Abb. 2 dargestellten Schaltung und  $R_1 = R_2 = 50\Omega$  zu dimensionieren.

Aus Abb. 4 folgt:

$$c_1 = c_5 = 1,301894 \quad l_2 = l_4 = 1,345558 \quad c_3 = 2,128570$$

und damit

$$C_1 = C_5 = 414\text{pF} \quad L_2 = L_4 = 1,07\mu\text{H} \quad C_3 = 678\text{pF}$$

Man erhält dann den in Abb. 3 dargestellten Dämpfungsverlauf.

### 3 Realisierung von Hochpass, Bandpass, Bandsperre

Filterhandbücher enthalten im allgemeinen nur die Dimensionierung von Tiefpässen, da sich der Entwurf von Hochpässen, Bandpässen und Bandsperren auf einen Tiefpass-Entwurf zurückführen lässt.

Abb. 5 illustriert die Transformation eines Referenztiefpasses (Abb. 5a) mit der Bezugsfrequenz  $\omega_B$  in einen Hochpass (Abb. 5b), Bandpass (Abb. 5c) sowie eine Bandsperre (Abb. 5d).

**Tiefpass-Hochpass-Transformation** Aus dem Referenz-Tiefpass in Abb. 5a ergibt sich das Hochpassverhalten in Abb. 5b, wenn die Frequenzen  $\omega < \omega_B$  des Tiefpasses in die entsprechenden Frequenzen  $\tilde{\omega} > \omega_B$  des Hochpasses abgebildet werden. Die komplette Abbildungsvorschrift zwischen der komplexen Frequenz  $j\omega$  des Tiefpasses und der komplexen Frequenz  $j\tilde{\omega}$  lautet

$$\frac{j\tilde{\omega}}{\omega_B} = \frac{\omega_B}{j\omega} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{p} = \frac{1}{p} \quad (18)$$

Damit entspricht das Dämpfungsverhalten des Hochpasses bei der Frequenz  $\tilde{\omega} = a\omega_B$  exakt dem Dämpfungsverhalten des zugrundeliegenden Tiefpasses bei der Frequenz  $\omega = \omega_B/a$ . Die zur Realisierung des Referenztiefpasses erforderlichen Induktivitäten und Kapazitäten seien bekannt. Bei der Transformation einer Induktivität  $L_0$  des Referenztiefpasses muss mit Gl.(18) für seine Impedanz gelten:

$$\underline{Z} = j\omega L_0 = \omega_B^2 \frac{L_0}{j\tilde{\omega}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{j\tilde{\omega}C} \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{\omega_B^2 L_0} \quad (19)$$

so dass eine Induktivität  $L_0$  des Tiefpasses im transformierten Hochpass durch die Kapazität  $C$  nach Gl.(19) ersetzt wird. Für eine Kapazität  $C_0$  des Referenztiefpasses gilt entsprechend

$$\underline{Y} = j\omega C_0 = \omega_B^2 \frac{C_0}{j\tilde{\omega}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{j\tilde{\omega}L} \quad \text{mit} \quad L = \frac{1}{\omega_B^2 C_0} \quad (20)$$

so dass  $C_0$  im transformierten Hochpass durch eine Induktivität  $L$  nach Gl.(20) ersetzt wird. Die aus Abb. 2 transformierten Hochpässe bestehen damit aus Längskapazitäten mit Querinduktivitäten. Die obigen Zusammenhänge sind in Abb. 6 tabellarisch zusammengefaßt.

**Tiefpass-Bandpass-Bandsperre Transformation** Beim transformierten Bandpass soll die Mittenfrequenz bei der Bezugsfrequenz  $\omega_B$  liegen, so dass die Frequenz  $\omega \approx 0$  des Tiefpasses in die Frequenzen  $\tilde{\omega} \approx \pm\omega_B$  des Bandpasses transformiert werden muss. Die Transformation erfolgt nicht nur zu

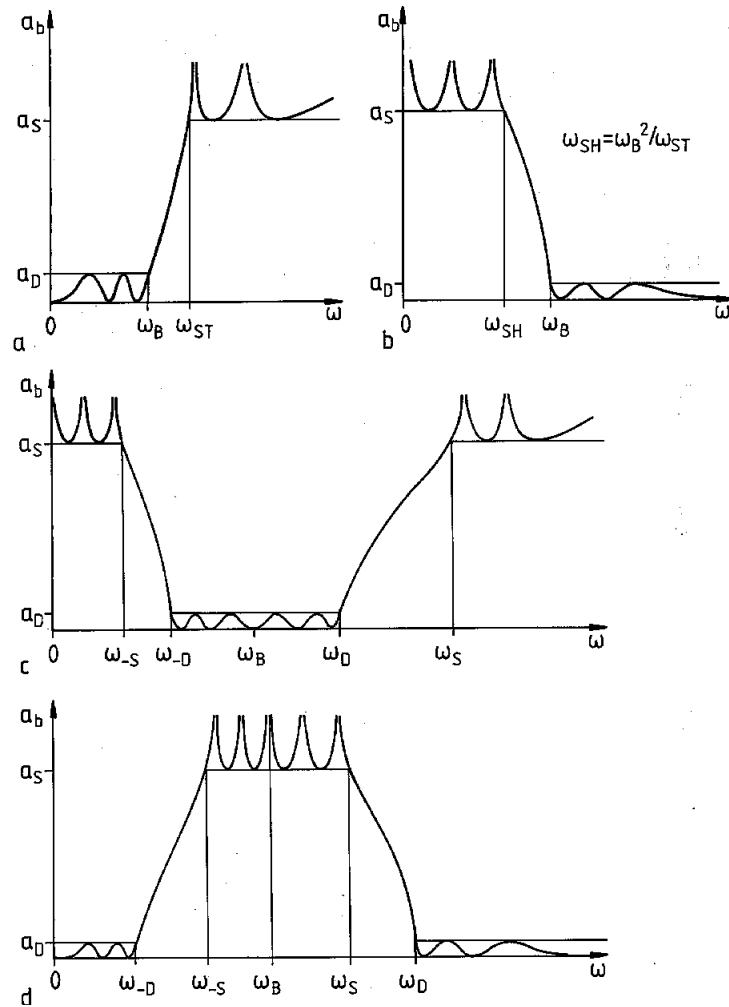


Abb. 5: Dämpfungsverlauf eines a) Referenztieffasses und des daraus abgeleiteten b) Hochpasses , c) Bandpasses sowie einer d) Bandsperre.

$\tilde{\omega} \approx +\omega_B$ , sondern auch zu  $\tilde{\omega} \approx -\omega_B$ , da immer  $|H(j\tilde{\omega})| = |H(-j\tilde{\omega})|$  gelten muss. Es wäre deshalb folgende Transformation wünschenswert:

$$j\omega \approx j2a(\tilde{\omega} - \omega_B) \quad \text{für } \tilde{\omega} \approx +\omega_B \tag{21}$$

$$j\omega \approx j2a(\tilde{\omega} + \omega_B) \quad \text{für } \tilde{\omega} \approx -\omega_B \tag{22}$$

wobei der Faktor  $a$  das Bandbreitenverhältnis zwischen dem transformierten Bandpass und dem Tiefpass angibt. Gl.(21),(22) gemeinsam werden relativ gut durch die Transformationsvorschrift

$$j\omega = ja \frac{(\tilde{\omega} - \omega_B)(\tilde{\omega} + \omega_B)}{\tilde{\omega}} = a(j\tilde{\omega} + \omega_B^2/j\tilde{\omega}) \tag{23}$$

oder in normierter Form mit  $p = j\omega/\omega_B$ ,  $\tilde{p} = j\tilde{\omega}/\omega_B$  durch

$$p = a \left( \tilde{p} + \frac{1}{\tilde{p}} \right) \tag{24}$$

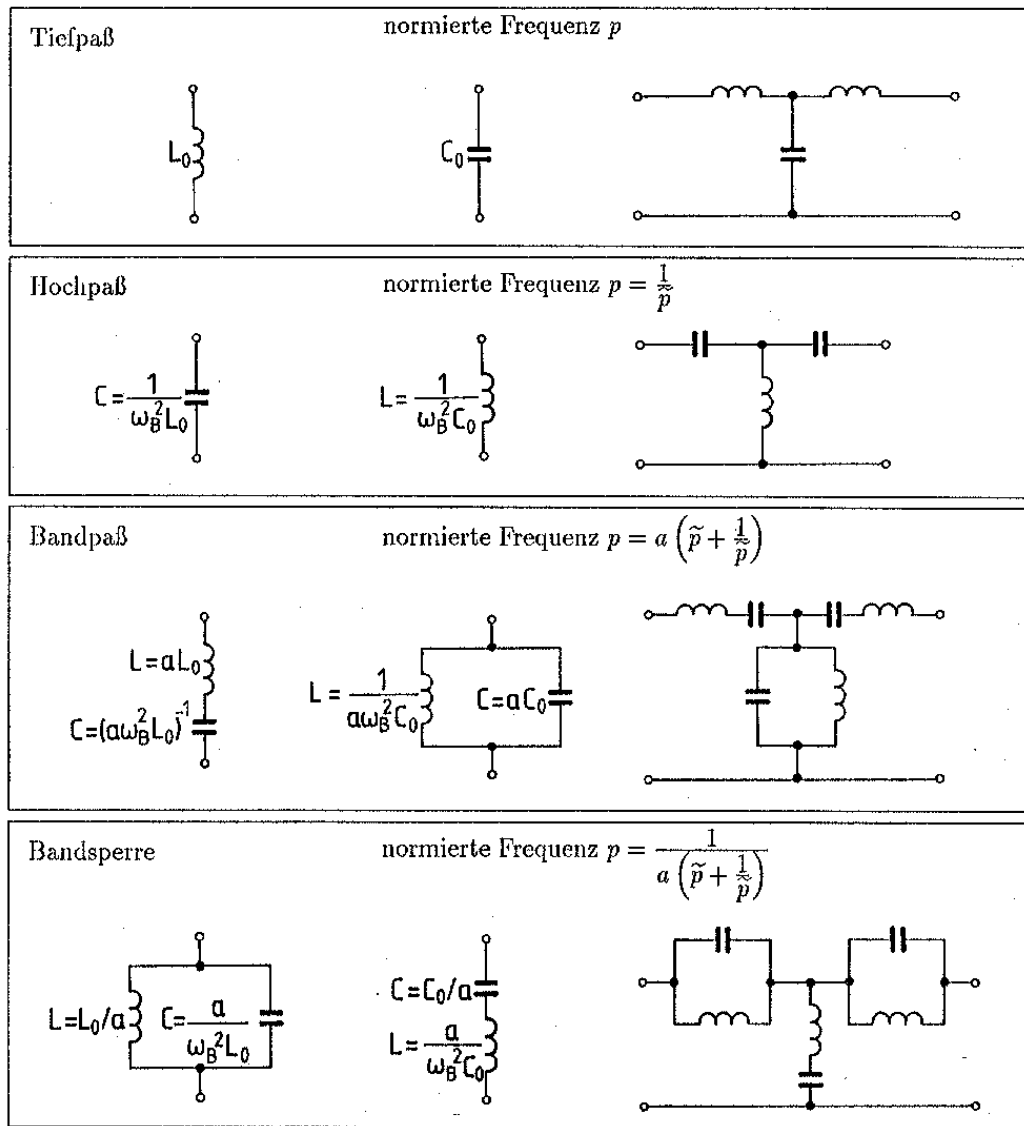


Abb. 6: Transformation eines Referenztieffasses in Hochpass, Bandpass, Bandstoppe.

erfüllt. Ähnlich wie bei der Tiefpass-Hochpass-Transformation können auch bei der Tiefpass-Bandpass-Transformation die Induktivitäten und Kapazitäten des Referenztieffasses durch geeignete Reaktanzen ersetzt werden. Bei der Transformation einer Induktivität  $L_0$  des Referenztieffasses muss mit Gl. (23) gelten:

$$\underline{Z} = j\omega L_0 = j\tilde{\omega}aL_0 + \frac{a\omega_B^2}{j\tilde{\omega}}L_0 \stackrel{!}{=} j\tilde{\omega}L + \frac{1}{j\tilde{\omega}C} \quad (25)$$

mit

$$L = aL_0, \quad C = \frac{1}{a\omega_B^2 L_0} \quad (26)$$

so dass eine Induktivität des Tiefpasses im transformierten Bandpass durch einen Serienschwingkreis ersetzt wird. Entsprechend gilt bei einer Kapazität  $C_0$  des Referenztieffasses:

$$\underline{Y} = j\omega C_0 = j\tilde{\omega}aC_0 + \frac{a\omega_B^2}{j\tilde{\omega}}C_0 \stackrel{!}{=} j\tilde{\omega}C + \frac{1}{j\tilde{\omega}L} \quad (27)$$



mit

$$C = aC_0, \quad L = \frac{1}{a\omega_B^2 C_0}, \quad (28)$$

der damit in einen Parallelschwingkreis transformiert wird.

Die Durchlaßgrenzfrequenzen des Bandpasses  $\tilde{\omega} = \omega_{\pm D}$  ergeben sich aus der Durchlaßgrenzfrequenz des Tiefpasses  $\omega = \omega_B$  mit Gl.(23) zu:

$$\omega_{\pm D} = \omega_B \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4a^2}} \pm \frac{1}{2a} \right) \quad (29)$$

so dass sich die gewünschte Durchlaßbandbreite  $(\omega_{+D} - \omega_{-D}) = \omega_B/a$  ergibt. Aufgrund der endlichen Güte  $Q$  der verwendeten Bauelemente ( $Q = \omega L/R$ ,  $R$  parasitärer Reihenwiderstand bei einer Induktivität bzw.  $Q = \omega C/G$ ,  $G$  parasitärer Paralleleitwert bei Kapazitäten) sind nicht beliebig kleine Bandbreiten realisierbar. Praktisch sollte  $a \ll Q \approx 10 \dots 100$  erfüllt sein. Für kleinere Bandbreiten und damit höhere Güten können Quarze, keramische Filter, SAW(surface acoustic wave)-Filter oder unter Umständen auch Filter mit Leitungselementen eingesetzt werden.

Bei der Tiefpass-Bandsperre Transformation gelten ähnliche Überlegungen wie beim Bandpass, wobei der Tiefpass gedanklich erst in einen Hochpass und dieser Hochpass dann gemäß obiger Bandpass-Transformationsbeziehungen transformiert wird.

Die Transformationsbeziehungen sind in Tabelle 6 nochmals zusammengestellt.

Bei der praktischen Filtersynthese wird häufig gedanklich zunächst  $\omega_B = 1/s$  und ein Impedanzniveau von  $R = 1\Omega$  zugrundegelegt. Die so normierten Induktivitäten und Kapazitäten werden dann erst zum Schluss gemäß Gl.(17) entnormiert.

## 4 Positiv-Impedanz-Inverter (PII)

Mit den vorgenannten Überlegungen ist die Synthese einer breiten Klasse von Filtern möglich. Es können sich aber möglicherweise Bauelementewerte ergeben, die nur schwer realisierbar sind. In diesem Fall kann es vorteilhaft sein, Impedanzen zu transformieren, beispielsweise mit einem Positiv-Impedanz-Inverter (PII).

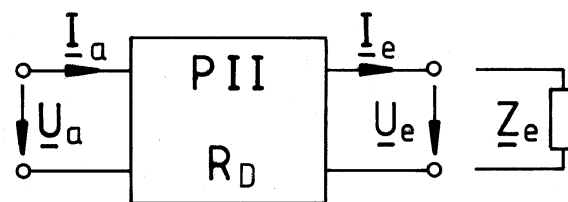


Abb. 7: Positiv-Impedanz-Inverter.

Ein Positiv-Impedanz-Inverter gemäß Abb. 7 mit dem Bezugswiderstand  $R_D$  soll einen Abschlusswiderstand  $Z_e$  in einen Eingangswiderstand

$$Z_a = \frac{U_a}{I_a} = \frac{R_D^2}{Z_e} \quad (30)$$

transformieren, ihn also invertieren. Die Kettenmatrix des PII ist gegeben als

$$\begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix} = \exp(j\varphi) \begin{pmatrix} 0 & R_D \\ \frac{1}{R_D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_e \\ I_e \end{pmatrix} \tag{31}$$

wobei sich mit Reaktanzen beispielsweise folgende Realisierungsmöglichkeiten (Abb. 8) ergeben:

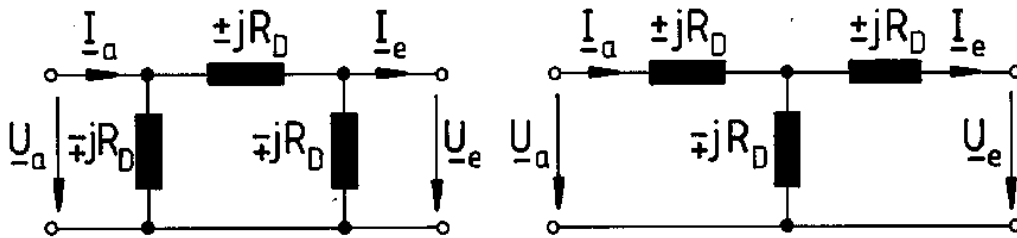


Abb. 8: Positiv-Impedanz-Inverter in  $\pi$ - oder T-Schaltung

Reaktanzen  $\pm jR_D$  sind jedoch breitbandig nicht realisierbar. Eine schmalbandige Realisierung um eine Bezugsfrequenz  $\omega_B$  herum ist jedoch beispielsweise möglich gemäß Abb. 9.

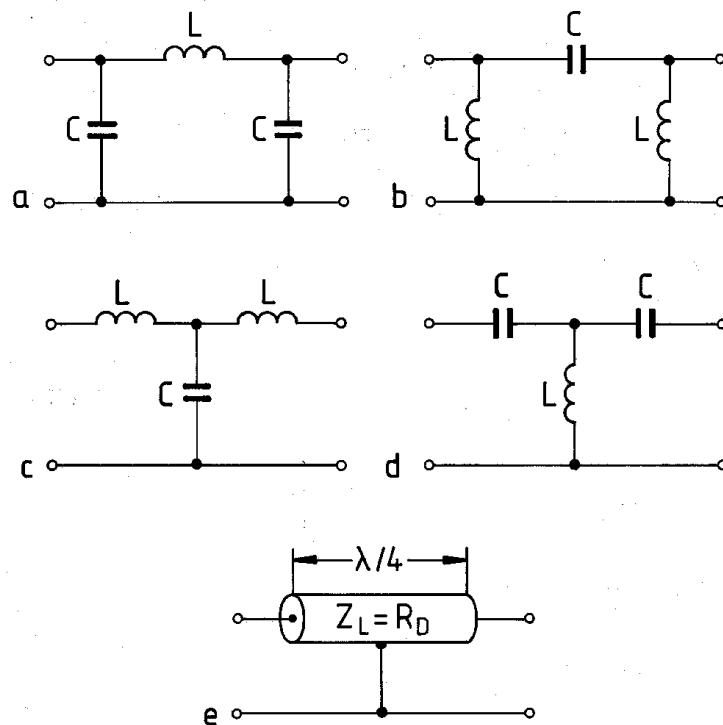


Abb. 9: Schmalbandige Positiv-Impedanz-Inverter.

Für die LC-Schaltungen gilt dabei  $\omega_B L = R_D = (\omega_B C)^{-1}$ . Ein schmalbandiger PII kann auch durch eine  $\lambda/4$ -Leitung mit dem Wellenwiderstand  $Z_L = R_D$  dargestellt werden.

Mit Hilfe eines PII ist es beispielsweise möglich, eine Kapazität in eine Induktivität oder umgekehrt zu transformieren. Die schmalbandige Realisierung nach Abb. 9 kann dabei durchaus ausreichend sein,

solange es sich um die Synthese schmaler Bandfilter handelt.

## 5 Gekoppelte Bandfilter

Bandfilter werden häufig auch als miteinander verkoppelte Schwingkreise realisiert. Unter Berücksichtigung des Positiv-Impedanz-Inverters ist auch hier ein systematischer Entwurf möglich.

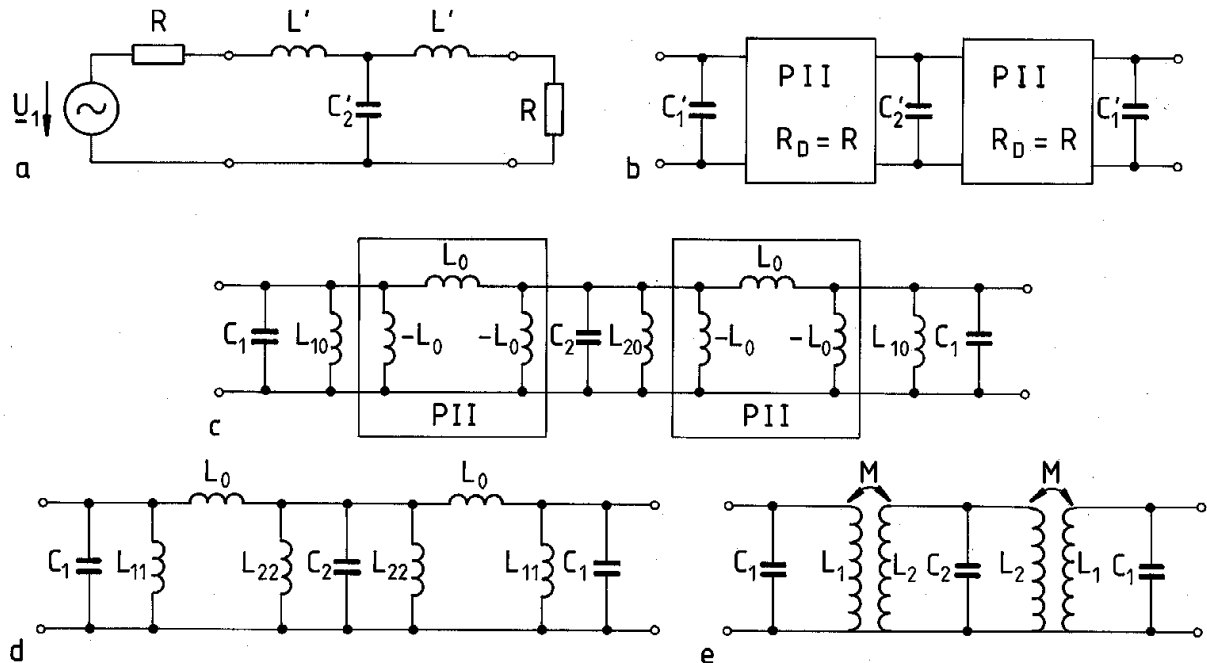


Abb. 10: Tiefpass-Bandpass-Transformation mit gekoppelten Schwingkreisen.

Als Beispiel wird in Abb. 10 die Transformation eines Tiefpassfilters der Ordnung  $N = 3$  in einen Bandpass betrachtet. Zunächst werden beim Tiefpass in Abb. 10a die Induktivität  $L'$  mit Hilfe von Positiv-Impedanz-Invertoren mit den Bezugswiderständen  $R_D = R$  in die Kapazitäten

$$C'_1 = \frac{L'}{R^2} \quad (32)$$

in Abb. 10b umgewandelt. Der Tiefpass von Abb. 10b hat damit die gleichen Eigenschaften wie der Tiefpass in Abb. 10a. Der Tiefpass von Abb. 10b wird nun mit Hilfe der Tiefpass-Bandpass-Transformation in einen Bandpass (Mittenfrequenz  $\omega_B$ , Bandbreite  $\omega_B/a$ ) umgewandelt (vergl. Tabelle 6), so dass sich in Abb. 10c ergibt

$$C_1 = aC'_1, \quad L_{10} = \frac{1}{a\omega_B^2 C'_1}, \quad C_2 = aC'_2, \quad L_{20} = \frac{1}{a\omega_B^2 C'_2} \quad (33)$$

und die Positiv-Impedanz-Inverter können schmalbandig nach Abb. 8 mit  $R_D = R = \omega_B L_0$ , d.h. mit positiven und negativen Induktivitäten

$$L_0 = \frac{R}{\omega_B} \quad (34)$$

realisiert werden.

Durch Zusammenfassung der Induktivitäten ergibt sich dann Abb. 10d, wobei die Induktivität  $L_{20}$  in 2 parallele Induktivitäten von jeweils  $2L_{20}$  aufgeteilt ist und sich damit

$$L_{11} = \left( \frac{1}{L_{10}} - \frac{1}{L_0} \right)^{-1} \quad \text{und} \quad L_{22} = \left( \frac{1}{2L_{20}} - \frac{1}{L_0} \right)^{-1} \quad (35)$$

ergeben. Die beiden  $\pi$ -Schaltungen aus Induktivitäten können bei Vergleich mit Gl.(7), (8), Abschnitt P als Transformatoren dargestellt werden mit

$$L_1 = \frac{L_{11}(L_{22} + L_0)}{L_{11} + L_{22} + L_0} \quad (36)$$

$$L_2 = \frac{L_{22}(L_{11} + L_0)}{L_{11} + L_{22} + L_0} \quad (37)$$

und  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$  mit

$$M = \frac{L_{22} L_{11}}{L_{11} + L_{22} + L_0} \quad (38)$$

beziehungsweise

$$k = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{L_0}{L_{22}}\right)\left(1 + \frac{L_0}{L_{11}}\right)}} \quad (39)$$

Alternativ zur induktiven Kopplung in Abb. 10e lässt sich das Filter auch mit kapazitiver Kopplung entwerfen, wenn die Reaktanzen des Positiv-Impedanz-Inverters in Abb. 7 nicht mit Induktivitäten, sondern mit Kapazitäten realisiert werden.

*Beispiel:* Aufbauend auf einen Tschebyscheff-Tiefpass 3. Ordnung mit maximaler Dämpfung von 0,1773 dB ( $\rho < 0.2$ ) im Durchlaßbereich soll ein Bandpass mit der Mittenfrequenz  $f_B = 10\text{MHz}$  und einer Bandbreite von 2 MHz ( $a = 5$ ) für  $R = 50\Omega$  entworfen werden.

Nach Filterhandbuch gilt:  $l' = 1,189469$ ,  $c'_2 = 1,154193$

Damit hätte der Referenziefpass ( $\omega_D = \omega_B = 2\pi f_B = 2\pi \cdot 10\text{MHz}$ ,  $R = 50\Omega$ )

$$L' = 947\text{nH} \quad , \quad C'_2 = 367\text{pF} \quad (40)$$

und für den Bandpass in Abb. 10e ergibt sich mit  $L_{10} = 134\text{nH}$ ,  $L_{20} = 138\text{nH}$ ,  $L_0 = 796\text{nH}$ ,  $L_{11} = 161\text{nH}$  und  $L_{22} = 422\text{nH}$  die Dimensionierung:

$$C_1 = 1,89\text{nF} \quad , \quad C_2 = 1,84\text{nF} \quad (41)$$

$$L_1 = 142\text{nH} \quad , \quad L_2 = 293\text{nH} \quad , \quad k = 0,241 \quad (42)$$

## 6 Allpässe

Allpässe haben eine konstante Dämpfung  $|H(j\omega)| = \text{const}$ , so dass nur die Phase  $\varphi$  von  $\omega$  abhängt, was zu einer frequenzabhängigen Gruppenlaufzeit gemäß Gl.(10) führt. Allpässe werden eingesetzt, um Laufzeitverzerrungen auszugleichen. Nähere Informationen findet man beispielsweise in Meinke/Gundlach: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, 4. Auflage.

## 7 Filter mit Leitungen

**Filter mit quasi-konzentrierten Elementen** Die einfachste Möglichkeit zur Realisierung eines Tiefpassfilters gemäß Abb. 2 besteht darin, die Kapazitäten und Induktivitäten durch kurze Leitungsstücke (Länge  $\ll \lambda/4$  im interessierenden Frequenzbereich) darzustellen, wobei Induktivitäten durch Leitungsstücke mit sehr hohem Wellenwiderstand  $\sqrt{L'/C'}$  ( $\sqrt{L'/C'} \gg Z_L$ ,  $Z_L$ -Wellenwiderstand der Zuleitung), und Kapazitäten durch Leitungsstücke mit sehr kleinem Wellenwiderstand  $\sqrt{L'/C'}$  ( $\sqrt{L'/C'} \ll Z_L$ ) realisiert werden.

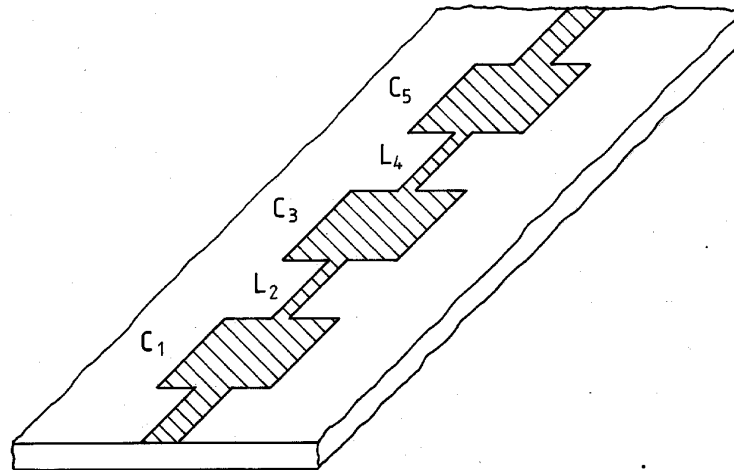


Abb. 11: Schematische Realisierung eines Tiefpassfilters 5. Ordnung.

Als Beispiel ist in Abb. 11 ein Tiefpassfilter der Ordnung  $N = 5$  in Anlehnung an Abb. 2, unten, skizziert. Die Kapazitäten  $C_i$  und Induktivitäten  $L_i$  ergeben sich mit den jeweiligen Leitungsbelägen  $C'_i$ ,  $L'_i$  und den jeweiligen Leitungslängen  $l_i$  näherungsweise zu  $C_i \approx C'_i \cdot l_i$ ,  $L_i \approx L'_i \cdot l_i$ .

Auch für Bandfilter lassen sich leicht schmalbandige Leitungsrealisierungen angeben. So können für den Bandpass in Abb. 10c die Positiv-Impedanz-Inverter durch  $\lambda/4$ -Leitungen (vergl. Abb. 9e) und die 3 Parallelschwingkreise durch am Ende kurzgeschlossene  $\lambda/4$ -Stichleitungen realisiert werden.

**Filter mit Leitungen jeweils gleicher Länge** Eine genauere und doch einfache Analyse von Leitungsfilttern wie z.B. in Abb. 11 ist dann möglich, wenn alle vorkommenden Leitungsstücke gleich lang sind.

Wenn man beispielsweise gemäß Abschnitt SMI eine am Ende kurzgeschlossene Leitung der Länge  $l$  mit dem Wellenwiderstand  $Z_L$  betrachtet, gilt für die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_a = Z_L \tanh(\underline{\gamma}l) \quad (43)$$

bzw. für eine verlustfreie Leitung mit  $\underline{\gamma} = j\beta = j\omega/v$

$$\underline{Z}_a = Z_L \tanh(j\omega l/v) \quad (44)$$

wobei wir die komplexe Frequenz  $j\omega = s$  und  $l/v = \tau$ ,  $\tau$ -Laufzeit der Leitung (Dispersion vernachlässigt), einführen können und sich so ergibt

$$\underline{Z}_a = Z_L \cdot S \quad (45)$$

wobei  $S$  eine transformierte Frequenzebene gemäß

$$S = \tanh(s\tau) \quad (46)$$

angibt. Gl.(46) wird auch als *Richards-Transformation* bezeichnet, die sich mit

$$\tanh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \quad (47)$$

auch schreiben lässt als

$$S = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (48)$$

mit

$$z = \exp(2s\tau), \quad (49)$$

wobei Gl.(49) praktisch der  $z$ -Transformation entspricht (vergleiche 'Signale und Systeme').

Der Grundgedanke der Filtersynthese besteht nun darin, einen Standardfilterentwurf in der  $\underline{S}$ -Ebene durchzuführen und die dort erhaltenen Elemente dann durch entsprechende Leitungsstücke in der  $s$ -Ebene zu ersetzen. So entspricht die Impedanz einer kurzgeschlossenen Leitung gemäß Gl.(45) formal in der  $\underline{S}$ -Ebene der Impedanz einer Induktivität  $L = Z_L$ . Damit lässt sich die kurzgeschlossene Leitung in der  $\underline{S}$ -Ebene formal als Induktivität darstellen (siehe auch Abb. 12). Ähnlich lässt sich die am Ende leerlaufende Leitung durch eine Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_a = Z_L \coth(\underline{\gamma}l) = \frac{Z_L}{S} \quad (50)$$

beschreiben und damit in der  $\underline{S}$ -Ebene durch eine Kapazität  $C = 1/Z_L$  darstellen.

Ein allgemeines Leitungselement kann mit einer Kettenmatrix (siehe Seite SMI/2) beschrieben werden, die sich mit der Richards-Transformation schreiben lässt:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{I}_a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - S^2}} \begin{pmatrix} 1 & SZ_L \\ \frac{S}{Z_L} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_e \\ \underline{I}_e \end{pmatrix} \quad (51)$$

Da sich diese Matrix in der  $\underline{S}$ -Ebene nicht als einfaches Reaktanz-Netzwerk darstellen lässt, wird in der  $\underline{S}$ -Ebene ein neues Element, das sogenannte Einheitselement (engl. unit element, abgekürzt UE) mit der charakteristischen Impedanz  $Z = Z_L$  eingeführt, welches durch die Matrix Gl.(51) repräsentiert wird. Die korrespondierenden Elemente in der Leitungsebene und der Richards-Ebene sind in Abb. 12 zusammenfassend dargestellt.

Wenn man die komplexen Frequenzen gemäß  $s = \sigma + j\omega$  und  $S = u + jv$  beschreibt, ist der Zusammenhang zwischen  $\omega$  (für  $s = j\omega$ ) und der transformierten Frequenz  $v$  (für  $S = jv$ ) nach Gl.(46) durch

$$v = \tan(\omega\tau) \quad (52)$$

gegeben. Kleine Frequenzen  $v \ll 1$  in der  $\underline{S}$ -Ebene entsprechen damit den Frequenzen  $\omega \approx 0, \pi/\tau, 2\pi/\tau, \dots$ , während große  $v \rightarrow \infty$  den Frequenzen  $\omega \approx \pi/2\tau, 3\pi/2\tau, 5\pi/2\tau, \dots$  entsprechen.

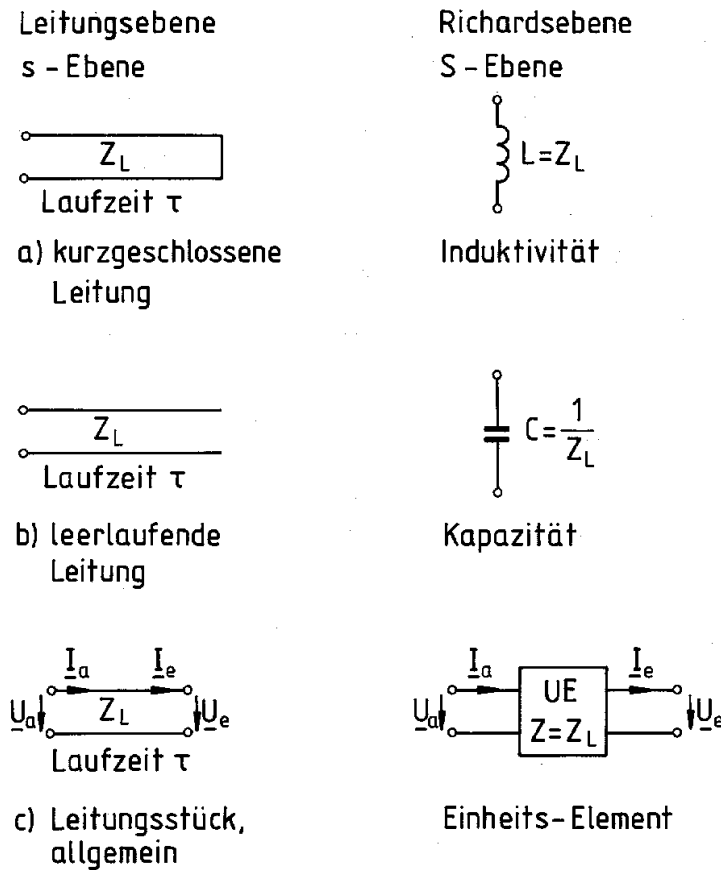


Abb. 12: Richards-Transformation von Schaltungselementen.

Zur Illustration zeigt Abb. 13a den Dämpfungsverlauf eines Referenztiefpasses (Tschebyscheff-Tiefpass 3. Ordnung) in der  $\underline{S}$ -Ebene, woraus sich dann nach Transformation in Abb. 13b ein Leitungsfilter mit über  $\omega$  periodischem Dämpfungsverlauf ergibt. So wird der Tiefpass in Abb. 13a für kleine Frequenzen  $\omega \ll \pi/2\tau$  wieder in einen Tiefpass transformiert, für  $\omega \approx \pi/2\tau$  in eine Bandsperre, für  $\omega \approx \pi\tau$  in einen Bandpass usw.

Ein Realisierungsbeispiel dafür ist in Abb. 15 dargestellt. Für den gewünschten Tschebyscheff-Tiefpass werden zunächst die Induktivitäten  $L_1$ ,  $L_3$ ,  $C_2$  für die gewünschte Dämpfungsgrenzfrequenz  $\nu_D$  in der  $\underline{S}$ -Ebene bestimmt. Wenn man bei der Transformation in die Leitungsebene die Induktivitäten und Kapazitäten gemäß Abb. 12 einfach durch kurzgeschlossene bzw. leerlaufende Leitungsstücke ersetzt, entsteht das Problem, dass alle Leitungsstücke an der gleichen Stelle angreifen, was oft nur schwer realisierbar ist.

Es ist deshalb zweckmäßig, in das Filter Einheitselemente gemäß Abb. 15b einzuführen (dies entspricht Leitungsstücken mit dem Wellenwiderstand  $Z_L = Z = R$ ), die das Übertragungsverhalten des Filters nicht verändern. Einheitselemente mit angeschlossenen Reaktanzen können dann entsprechend Abb. 14 umgeformt werden (Kuroda-Transformation), so dass sich schließlich die in Abb. 15c dargestellte Realisierung in der  $\underline{S}$ -Ebene ergibt. In der Leitungsrealisierung (mit der Filterdämpfung nach Abb. 13b) erhält man dann die Anordnung nach Abb. 15d mit drei leerlaufenden Sticheleitungen.

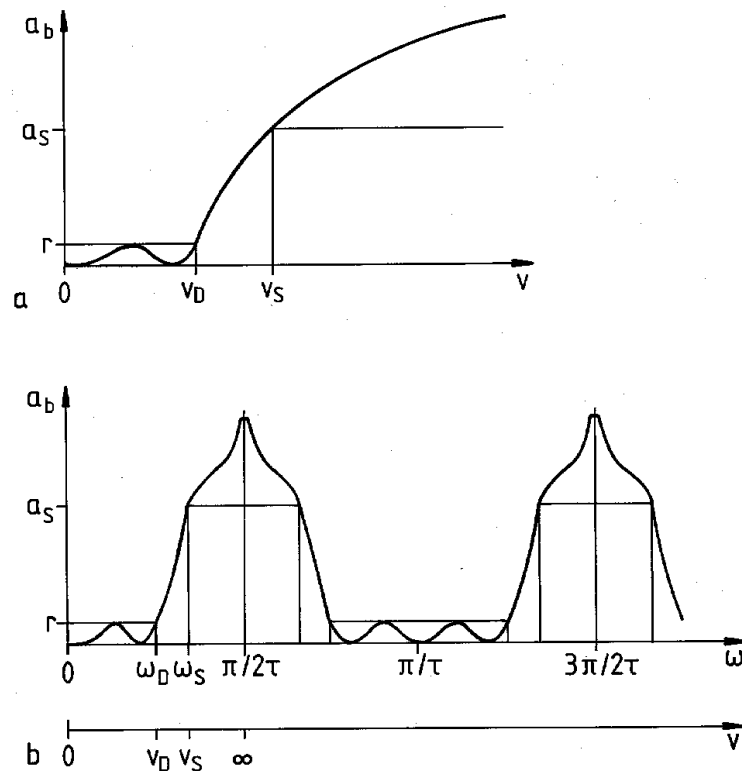


Abb. 13: Entwurf von Leitungsfiltern mit Richards-Transformation. a) Tiefpassentwurf in der  $\underline{S}$ -Ebene (Frequenz  $\nu$ ) und b) Dämpfungsverhalten des transformierten Filters mit Leitungselementen.

Bei der gemäß obigen Überlegungen durchgeführten Filtersynthese ist zu beachten, dass Leitungswellenwiderstände nur in einem begrenzten Bereich realisierbar sind. Einheitselemente sind aber nicht nur durch einfache Leitungsstücke realisierbar, sondern auch mit verkoppelten Leitungen (Mehrleitersysteme), so dass sich mit verkoppelten Leitungen unter Umständen besser realisierbare Filter entwerfen lassen (siehe Zinke, Brunwig, Band I oder Meinke/Gundlach, Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, 4. Auflage, Abschnitt F).

Wenn das Filter in Abb. 11 durch Hintereinanderschaltung gleichlanger Leitungsstücke realisiert wird, lässt sich das in der  $\underline{S}$ -Ebene als die Hintereinanderschaltung von Einheitselementen unterschiedlicher Impedanz  $Z_i$  darstellen. Wenn  $\underline{U}_a, \underline{I}_a$  Spannung und Strom am Eingang und  $\underline{U}_e, \underline{I}_e$  Spannung und Strom am Ende des Filters bezeichnen, gilt für die Kettenmatrix bei  $N$  hintereinander geschalteten Einheitselementen (vergleiche Gl.(51)):

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{I}_a \end{pmatrix} = \frac{1}{(\sqrt{1-S^2})^N} \prod_{i=1}^N \begin{pmatrix} 1 & SZ_i \\ \frac{S}{Z_i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_e \\ \underline{I}_e \end{pmatrix} \quad (53)$$

woraus sich die Übertragungsfunktion des Filters bestimmen lässt. Die einzelnen Wellenwiderstände  $Z_i$  lassen sich dann so wählen, dass die gewünschten Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion in der  $\underline{S}$ -Ebene entstehen.

Insbesondere bewirkt eine  $\lambda/4$ -Leitung (dort ist  $S \rightarrow \infty$ ) mit dem Wellenwiderstand  $Z_L = \sqrt{R_1 R_2}$  eine schmalbandige Impedanztransformation zwischen den Widerständen  $R_1, R_2$ . Damit stellt ein



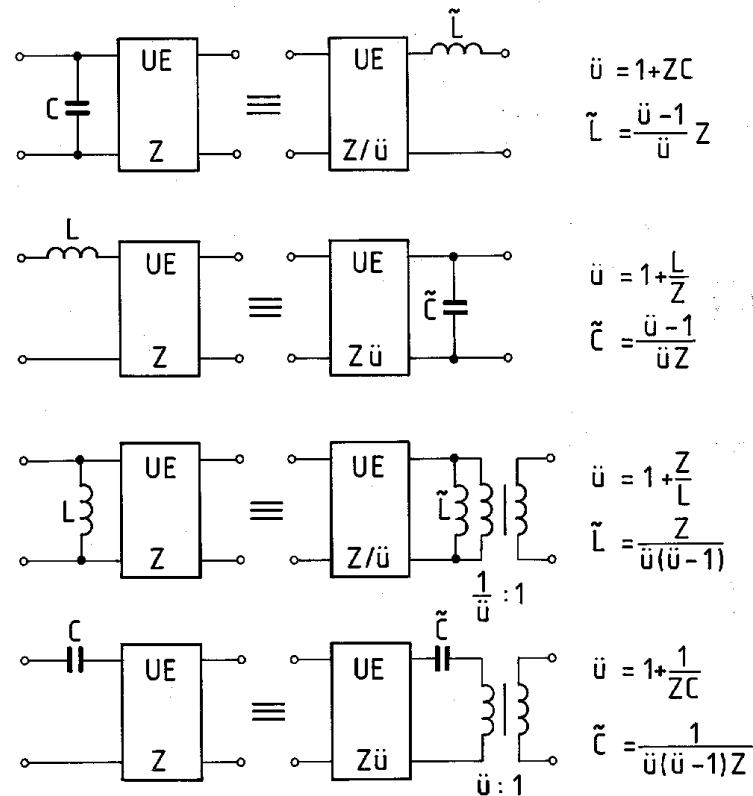


Abb. 14: Kuroda-Transformationen.

Einheitselement für  $S \rightarrow \infty$  (bzw.  $v \rightarrow \infty$ ) einen schmalbandigen Impedanzwandler (genauer Impedanzinverter) dar. Zur breitbandigen Impedanztransformation um  $S \rightarrow \infty$  herum ist in der  $S$ -Ebene ein hochpassartiges Übertragungsverhalten erforderlich, das sich durch Analyse von Gl.(53) mit geeignet monoton gestuften Impedanzen  $Z_i$  erreichen lässt (Eine genauere Analyse derartiger mehrstufiger Leitungstransformatoren findet sich in Zinke-Brunswig, Band I).

## 8 SAW-Filter

Zur Realisierung von Filtern (insbesondere Bandpassfiltern) im Frequenzbereich  $10\text{MHz} < f < 1\text{GHz}$  werden auch oft SAW-Filter (SAW = surface acoustic wave) eingesetzt (beispielsweise Zwischenfrequenz-Filter in Fernsehempfängern).

Für SAW-Filter werden piezoelektrische Kristalle (z.B. Lithiumniobat ( $\text{LiNbO}_3$ ), Lithiumtantalat ( $\text{LiTaO}_3$ ), Quarz ( $\text{SiO}_2$ )) mit Interdigitalwandlern versehen, so dass eine angelegte Spannung an den Interdigitalwandlern zu mechanischen Verformungen an der Kristalloberfläche führt, die sich dann als akustische Oberflächenwelle (englisch abgekürzt SAW) mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von typischerweise  $v_a = 3000 \dots 4000\text{m/s}$  ausbreiten. Dies führt beim oben angegebenen Frequenzbereich  $10\text{MHz} < f < 1\text{GHz}$  zu akustischen Wellenlängen  $\Lambda = v_a/f \approx 3\mu\text{m} \dots 400\mu\text{m}$ .

Abb. 16 zeigt ein SAW-Filter, es besteht aus 2 Interdigitalwandlern zur Wandlung des elektrischen Signals in das akustische Signal und wieder zurück.

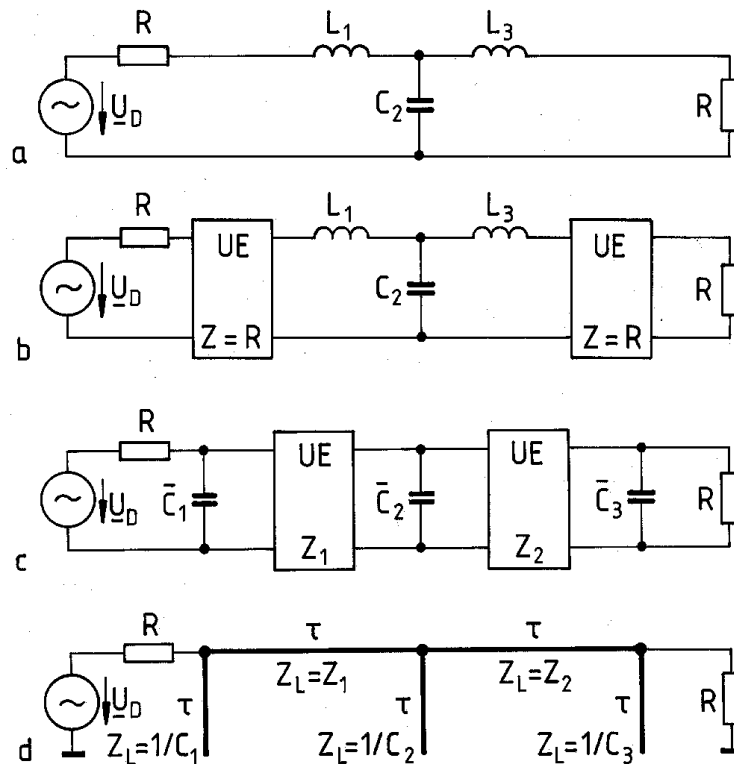


Abb. 15: Anwendung der Kuroda-Transformation.

Zum Verständnis des Filters ist der Interdigitalwandler genauer zu analysieren, wie er beispielsweise in Abb. 17 dargestellt ist.

Eine angelegte Spannung  $u(t)$  führt zu elektrischen Feldern, wie sie durch Pfeile in Abb. 17 dargestellt sind. Diese Felder bewirken entsprechende mechanische Verformungen, die sich dann als SAW mit der Geschwindigkeit  $v_a$  ausbreiten. Die Wirkung des Interdigitalwandlers lässt sich als Transversalfilter auffassen, so dass sich das Ausgangssignal  $y(t)$  (mechanische Auslenkung oder dergleichen) innerhalb der SAW als Überlagerung der Wirkungen der einzelnen Fingerelemente darstellen lässt:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N (-1)^n w_n u(t - n\tau) \quad (54)$$

mit der Laufzeit  $\tau = p/v_a$  zwischen den Fingerelementen und dem Wichtungskoeffizienten  $w_n$  des  $n$ -ten Segmentes proportional zur Überlappung der jeweiligen Fingerelektroden, siehe Abb. 17.

Für  $u(t) = \delta(t)$  ( $\delta(t)$ -Dirac Impuls) erhält man aus Gl.(54) die Impulsantwort  $y(t) = h(t)$  wie sie in Abb. 18 skizziert ist.

Entsprechend der Laufzeit der SAW unterhalb des Interdigitalwandlers hat die Impulsantwort eine endliche Dauer  $T = N\tau$ . Wenn die Zeitskala  $t'$  so eingeführt wird, dass sich der Impuls von  $t' = -T/2$  bis  $t' = +T/2$  erstreckt und nur die Frequenzkomponenten um  $f_0 = 1/2\tau$  herum betrachtet werden kann, gilt näherungsweise aus Abb. 18:

$$h(t') = w(t') \cos(2\pi f_0 t') \quad (55)$$

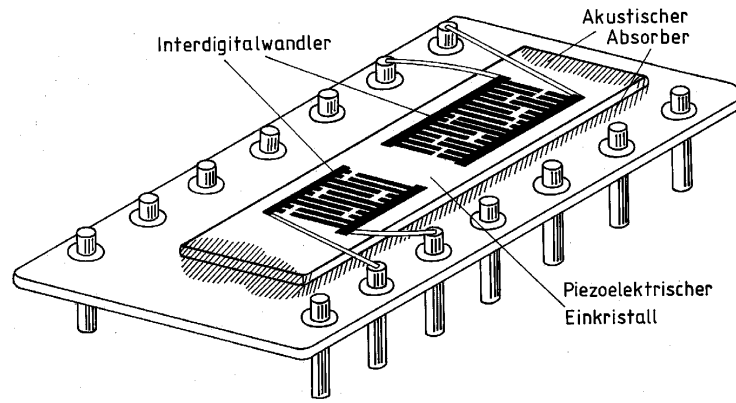


Abb. 16: Praktische Ausführung eines akustischen Oberflächenwellenfilters.

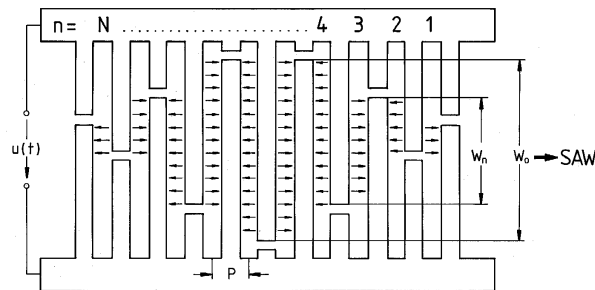


Abb. 17: Interdigitalwandler.

mit der quasi-kontinuierlichen Wichtungsfunktion  $w(t)$  mit  $w(t') = 0$  für  $|t'| > T/2$ .

Die Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$  ergibt sich als Fouriertransformierte der Impulsantwort  $h(t')$  zu (vergleiche 'Signale und Systeme'):

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} [\underline{W}(j(\omega - \omega_0)) + \underline{W}(j(\omega + \omega_0))], \tag{56}$$

wobei  $\underline{W}(j\omega)$  die Fouriertransformierte von  $w(t)$  und  $\omega_0 = 2\pi f_0$  bezeichnet.

*Beispiel:* Für gleichlange Finger des SAW-Filters sind die Wichtungskoeffizienten  $w_n$  konstant, so dass sich die Wichtungsfunktion  $w(t')$  als Rechteckfunktion darstellen lässt:

$$w(t') = \begin{cases} 1 & |t'| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t'| > \frac{T}{2} \end{cases} \tag{57}$$

so dass sich für die Übertragungsfunktion ergibt (vergleiche 'Signale und Systeme')

$$G(j\omega) = \frac{T}{2} \left[ \text{si} \left( \frac{T}{2}(\omega - \omega_0) \right) + \text{si} \left( \frac{T}{2}(\omega + \omega_0) \right) \right] \tag{58}$$

mit  $\text{si}(x) = \sin(x)/x$ . Solange wir ein schmalbandiges Filter mit  $T\omega_0 \gg 1$  betrachten und uns auf positive Frequenzen beschränken, ist der zweite si-Term vernachlässigbar und wir erhalten:

$$G(j\omega)|_{\omega > 0} \approx \frac{T}{2} \text{si}(\pi T(f - f_0)) \tag{59}$$

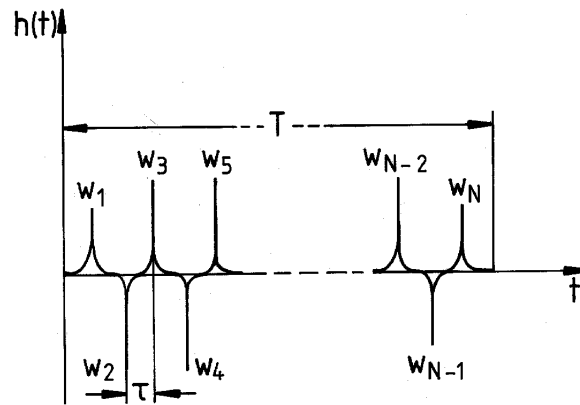


Abb. 18: Impulsantwort (schematisch) eines Interdigitalwandlers.

und es ergibt sich als 4 dB-Bandbreite  $B$  (Argument der si-Funktion  $= \pi/2$ ):

$$B = \frac{1}{T} = 2 \frac{f_0}{N}, \quad (60)$$

die damit genau umgekehrt proportional ist zur Laufzeit der SAW unterhalb des Interdigitalwandlers. Die oben angegebene Übertragungsfunktion beinhaltet nur die Wandlung vom elektrischen ins akustische Signal, so dass die komplette Übertragungsfunktion (elektrisch - akustisch - elektrisch) durch  $G^2(j\omega)$  beschrieben wird (Annahme gleicher Interdigitalwandler am Ein- und Ausgang) und die Bandbreite  $B$  gemäß Gl.(60) dann der 8 dB-Bandbreite entsprechen würde.

Beim kompletten SAW-Filter ist zusätzlich noch die elektrische Beschaltung und insbesondere die Kapazität der Interdigitalwandler zu berücksichtigen.