

Durch Rückkopplung kann ein Verstärker stabilisiert werden, er kann aber auch instabil werden und anfangen zu schwingen. Auch Oszillatoren stellen im Prinzip rückgekoppelte Verstärker dar.

## 1 Breitbandverstärker

Eine Anwendung für Verstärker mit Rückkopplung besteht in der Realisierung von Breitbandverstärkern. Als Beispiel werde ein Transimpedanzverstärker betrachtet, wie er in Abb. 1 dargestellt ist.

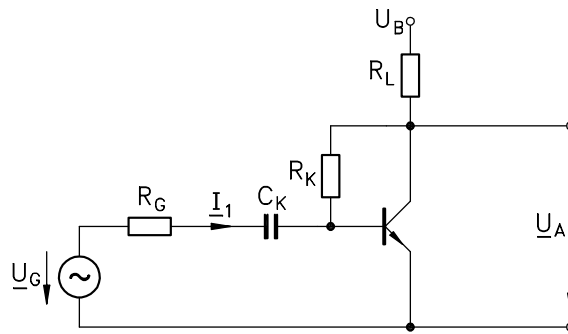


Abb. 1: Prinzip eines Transimpedanzverstärkers mit bipolarem Transistor.

Bei einem Transistor mit sehr hoher Strom- und Spannungsverstärkung ergibt sich näherungsweise  $\underline{U}_A \approx -R_K \cdot \underline{I}_1$ , wobei  $R_K$  dann als *Transimpedanz* bezeichnet wird.

Durch den Rückkoppelwiderstand  $R_K$  wird auch die Bandbreite des Verstärkers beeinflusst, wie im folgenden diskutiert werden soll. Die Koppelkapazität  $C_K$  sei sehr groß ( $C_K \rightarrow \infty$ ) und der Ausgang, abgesehen vom Widerstand  $R_L$ , unbelastet, so dass sich aus Abb. 1 folgendes „Hochfrequenzschaltbild“<sup>1</sup> ergibt.

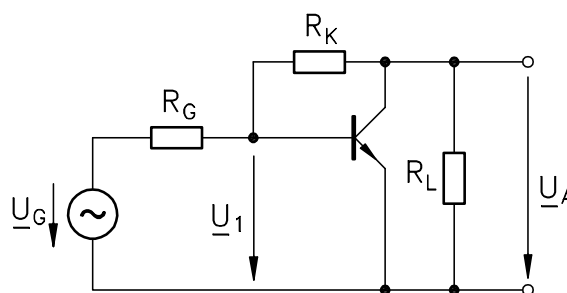


Abb. 2: „Hochfrequenzschaltbild“ des Transimpedanzverstärkers aus Abb. 1.

Der Bipolartransistor werde durch ein vereinfachtes Giacoletto-Ersatzschaltbild beschrieben:

Dabei ist  $c_{csp}$  die differentielle Kollektor-Basis-Sperrschichtkapazität,  $r_e$  der differentielle Widerstand

<sup>1</sup> Im Hochfrequenzschaltbild stellen Gleichspannungen Kurzschlüsse dar, und die Einstellung des Arbeitspunktes wird nicht beachtet.

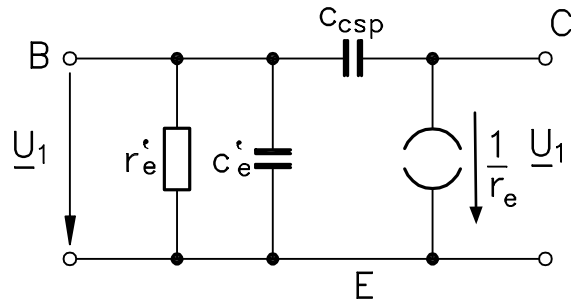


Abb. 3: Vereinfachtes Giacoletto-Ersatzschaltbild eines Bipolar-Transistors.

der Basis-Emitter-Diode ( $r_e = (kT/e)/I_E$ ,  $I_E$  – Emitterstrom,  $k$  – Boltzmann-Konstante,  $T$  – absolute Temperatur,  $e$  – Elementarladung) und  $r'_e = r_e/\beta_0$  ( $\beta_0$  – Gleichstromverstärkung in Emitterschaltung) und  $c'_e = 1/(r_e \cdot \omega_T)$  mit der Transitfrequenz  $f_T = \omega_T/2\pi$ .

Damit folgt aus Abb. 2 und 3 das Ersatzschaltbild des Verstärkers.

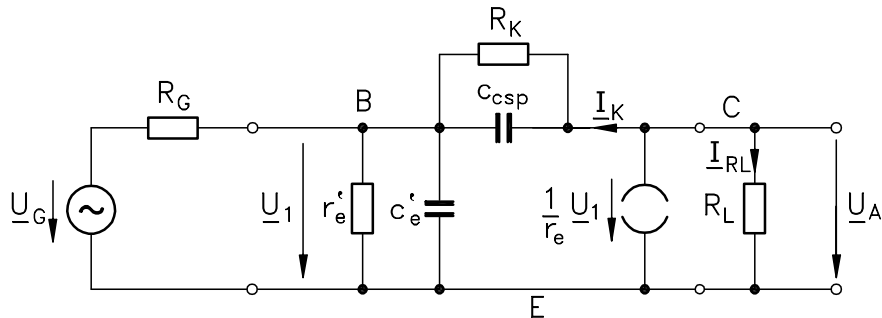


Abb. 4: Ersatzschaltbild des Verstärkers aus Abb. 1.

Unter der Voraussetzung, dass für den Strom im Rückkoppelzweig gilt  $|I_K| \ll |I_{RL}|$ , ergibt sich näherungsweise

$$U_A = -U_1 \frac{R_L}{r_e} = -U_1 \cdot v_i \tag{1}$$

mit der inneren Verstärkung

$$v_i = \frac{R_L}{r_e} \tag{2}$$

Da  $U_1$  und  $U_A$  damit in einfacher Weise miteinander verknüpft sind, genügt es, für die Bestimmung der gesamten Übertragungsfunktion die Übertragungsfunktion von  $U_G$  nach  $U_1$  zu bestimmen.

Unter Anwendung des *Miller-Effektes* (Miller-Kapazität) lassen sich  $R_K$  und  $c_{csp}$  aus dem Rückkoppelzweig transformieren, so dass sich der Eingangszweig gemäß Abb. 5 ergibt.

Abbildung 5 lässt sich schließlich vereinfachen zu Abb. 6.

Dabei stellt  $R'$  mit

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r'_e} + \frac{1 + v_i}{R_K} \tag{3}$$

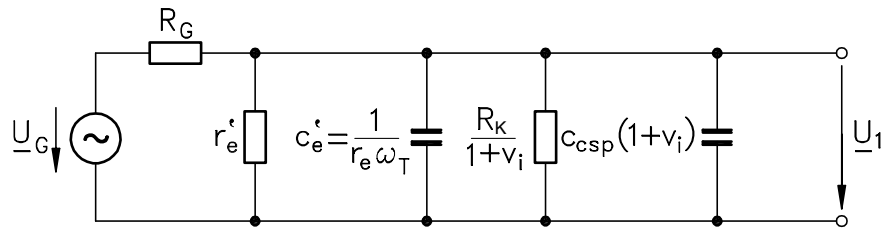


Abb. 5: Ersatzschaltbild des Eingangszweigs des Verstärkers aus Abb. 1.

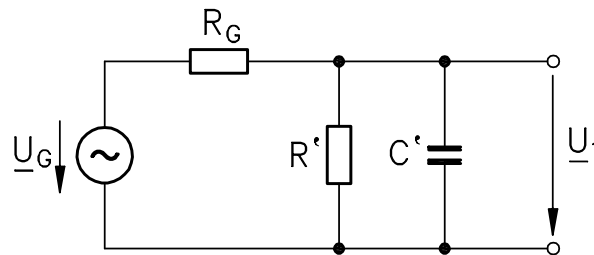


Abb. 6: Vereinfachtes Ersatzschaltbild des Eingangszweigs des Verstärkers aus Abb. 1.

die Parallelschaltung aus  $r'_e$  und  $\frac{R_K}{1+v_i}$  dar und

$$C' = c'_e + c_{csp}(1 + v_i). \quad (4)$$

Abbildung 6 stellt einen Tiefpass 1. Ordnung dar gemäß:

$$\frac{U_1}{U_G} = \frac{R'}{R' + R_G} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g} \quad \text{mit} \quad \omega_g = \frac{1}{C'} \left( \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_G} \right) \quad (5)$$

Die Grenzfrequenz  $\omega_g$  repräsentiert damit die Bandbreite des Breitbandverstärkers. Mit Gl. (1) und (2) gilt dann für die gesamte Übertragungsfunktion:

$$\frac{U_A}{U_G} = -v_i \frac{U_1}{U_G} = -\frac{v_m}{1 + j\omega/\omega_g} \quad (6)$$

mit der Verstärkung  $v_m$  bei kleinen Frequenzen

$$v_m = \frac{R_L R'}{r_e(R' + R_G)} \quad (7)$$

Sowohl die Bandbreite  $\omega_g$  als auch die Verstärkung  $v_m$  hängen von  $R'$  und damit vom Rückkoppelwiderstand  $R_K$  ab. Von Interesse ist dabei das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt

$$v_m \cdot \omega_g = \frac{R_L}{r_e R_G C'} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_T} \frac{R_G}{R_L} + c_{csp} R_G \left(1 + \frac{r_e}{R_L}\right)}, \quad (8)$$

das unabhängig von  $R'$  und damit auch unabhängig vom Rückkoppelwiderstand  $R_K$  wird. Durch Wahl von  $R_K$  kann somit entweder ein Breitbandverstärker hoher Verstärkung und kleiner Bandbreite oder geringer Verstärkung und hoher Bandbreite realisiert werden.

**Zahlenbeispiel:** Als Beispiel sei angenommen  $R_G = R_L = 50 \Omega$ ,  $r_e = 2,5 \Omega$  (Emitterstrom  $I_E = 10 \text{ mA}$ ),  $c_{csp} = 0,5 \text{ pF}$  und  $f_T = \frac{\omega_T}{2\pi} = 5 \text{ GHz}$ . Es ergibt sich dann ein Verstärkungs-Bandbreite-Produkt von  $v_m \cdot f_g = v_m \omega_g / (2\pi) \approx 2,75 \text{ GHz}$ . Weiterhin ergibt sich mit  $\beta_0 = 30$  und  $R_K = 3,15 \text{ k}\Omega$  beispielsweise ein  $v_m \approx 10$  und  $R' \approx 50 \Omega$ , so dass sich dann ein Breitbandverstärker mit der Bandbreite  $f_g = 275 \text{ MHz}$  und einer Verstärkung von 20 dB ergibt, der eingangsseitig reflexionsfrei an eine Leitung mit einem Wellenwiderstand  $Z_L = 50 \Omega$  angepasst ist.

Abb. 7 zeigt das Beispiel eines Breitbandverstärkers mit  $f_g \approx 10 \text{ GHz}$  basierend auf einem GaAs-MESFET. Die schwarzen Balken in Abb. 7 stellen Streifenleitungs-Elemente auf der Leiterplatte dar (oben Leiterbreite, unten Leiterlänge, jeweils in mm).

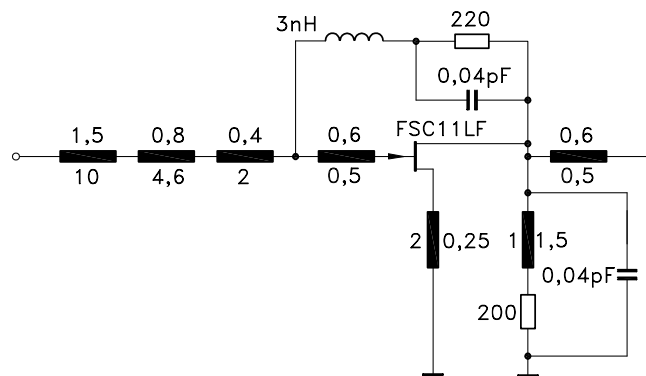


Abb. 7: Breitbandverstärker (10 GHz) mit einem GaAs-MESFET (Quelle: *Dissertation M. Martin, TU Berlin 1987*).

## 2 Beschreibung rückgekoppelter Verstärker

Zur systematischen Beschreibung rückgekoppelter Netzwerke betrachten wir Abb. 8 .

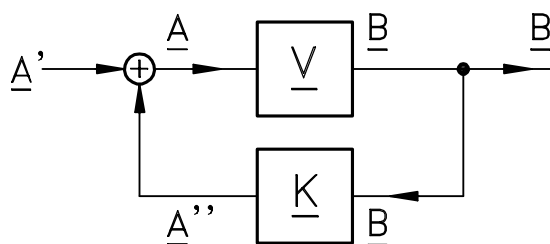


Abb. 8: Rückgekoppeltes Netzwerk mit Verstärkung  $\underline{V}$  und Rückkopplung  $\underline{K}$ .

Der Verstärker wird durch die Übertragungsfunktion  $\underline{V}$  charakterisiert mit

$$\underline{B} = \underline{V} \cdot \underline{A}, \quad (9)$$

wobei  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  die Zeiger (bzw. Fouriertransformierten) von Spannungen, Strömen oder Wellenamplituden am Eingang und Ausgang des Netzwerkes darstellen. Die Übertragungsfunktion  $\underline{K}$  des

Rückkoppelnetzwerks wird durch

$$\underline{A}'' = \underline{K} \cdot \underline{B} \quad (10)$$

charakterisiert, so dass sich unter Berücksichtigung des Summationspunkts am Eingang  $\underline{A} = \underline{A}' + \underline{A}''$  ergibt:

$$\underline{B} = \underline{V} \cdot \underline{A} = \underline{V}(\underline{A}' + \underline{A}'') = \underline{V}(\underline{A}' + \underline{K}\underline{B}) \quad (11)$$

und damit

$$\underline{B} = \underline{V}' \cdot \underline{A}' \quad (12)$$

mit

$$\underline{V}' = \frac{\underline{V}}{1 - \underline{K}\underline{V}}. \quad (13)$$

$\underline{V}'$  stellt damit die *effektive* Verstärkung des rückgekoppelten Verstärkers dar.

- Für  $|1 - \underline{K} \cdot \underline{V}| < 1$  gilt  $|\underline{V}'| > |\underline{V}|$ . Wir sprechen dann von einer „Mitkopplung“.
- Für  $|1 - \underline{K} \cdot \underline{V}| > 1$  gilt  $|\underline{V}'| < |\underline{V}|$ . Wir sprechen dann von einer „Gegenkopplung“.
- Für  $\underline{K} \cdot \underline{V} = 1$  geht  $\underline{V}' \rightarrow \infty$ , so dass dann der Verstärker anfängt zu schwingen. Wir sprechen dann von einem „Oszillator“.

Bei gegengekoppelten Systemen ist der Sonderfall sehr starker Gegenkopplung von Interesse mit  $|1 - \underline{K} \cdot \underline{V}| \gg 1$ , woraus sich dann mit Gl. (13)

$$\underline{V}' \approx -\frac{1}{\underline{K}} \quad \text{für } |1 - \underline{K} \cdot \underline{V}| \gg 1 \quad (14)$$

ergibt. Die Verstärkung ist dann nur noch von dem (z. B. passiven) Rückkoppelnetzwerk abhängig.

Weiterhin kann z. B. durch Gegenkopplung die Bandbreite eines Breitbandverstärkers erhöht werden. Wenn wir für  $\underline{V}$  ähnlich zu Gl. (6)

$$\underline{V} = -\frac{v_m}{1 + j\omega/\omega_g} \quad (15)$$

und  $\underline{K} = K$  als reell und frequenzunabhängig annehmen, ergibt sich

$$\underline{V}' = -\frac{v_m}{1 + K \cdot v_m} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{gr}} \quad \text{mit } \omega_{gr} = \omega_g(1 + K v_m), \quad (16)$$

so dass, wie schon oben diskutiert, die Bandbreite zwar erhöht werden kann, aber das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt konstant bleibt.

Das Verstärker-Netzwerk kann in verschiedener Weise mit dem Rückkoppelnetzwerk verschaltet werden. Es ergeben sich dann die vier Anordnungen gemäß Abb. 9.

Der im oberen Abschnitt 1 diskutierte Transimpedanzverstärker gemäß Abb. 4 stellt dabei beispielsweise ein Netzwerk mit Parallel-Parallel-Rückkopplung (siehe Abb. 9d) dar, wie Abb. 10 verdeutlicht.

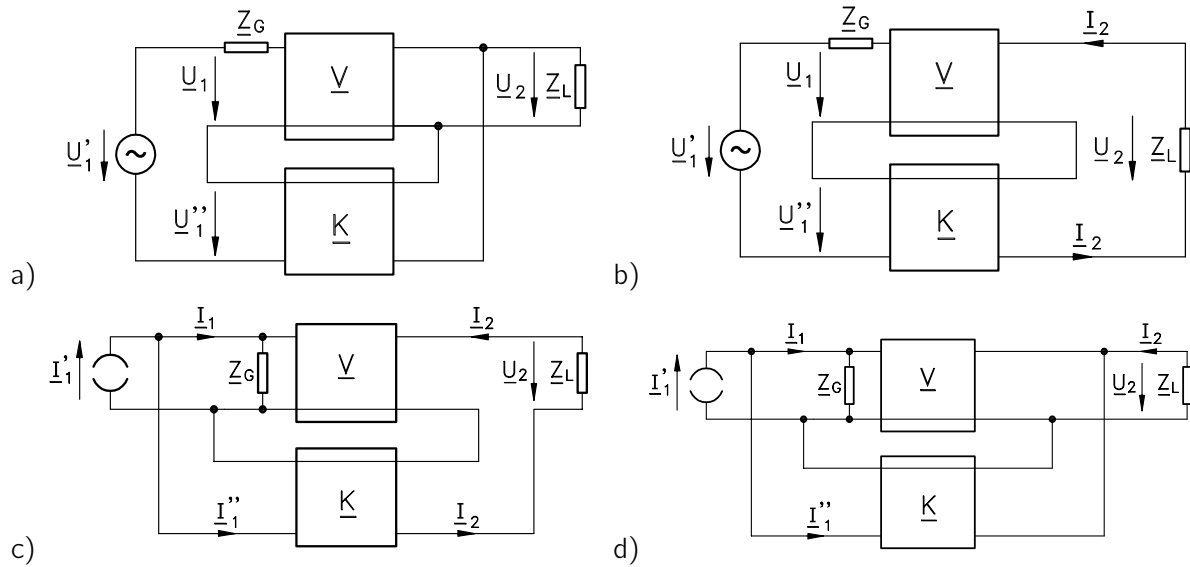


Abb. 9: Möglichkeiten der Verschaltung eines Verstärkers mit einem Rückkoppelnetzwerk: a) Serien-Parallel-Rückkopplung mit  $\underline{V} = \underline{U}_2/\underline{U}_1$ ,  $\underline{K} = -\underline{U}'_1/\underline{U}_2$ ,  $\underline{V}' = \underline{U}_2/\underline{U}'_1$ ; b) Serien-Serien-Rückkopplung mit  $\underline{V} = \underline{I}_2/\underline{U}_1$ ,  $\underline{K} = -\underline{U}'_1/\underline{I}_2$ ,  $\underline{V}' = \underline{I}_2/\underline{U}'_1$ ; c) Parallel-Serien-Rückkopplung mit  $\underline{V} = \underline{I}_2/\underline{I}_1$ ,  $\underline{K} = -\underline{I}'_1/\underline{I}_2$ ,  $\underline{V}' = \underline{I}_2/\underline{I}'_1$  und d) Parallel-Parallel-Rückkopplung mit  $\underline{V} = \underline{U}_2/\underline{I}_1$ ,  $\underline{K} = -\underline{I}'_1/\underline{U}_2$ ,  $\underline{V}' = \underline{U}_2/\underline{I}'_1$ .

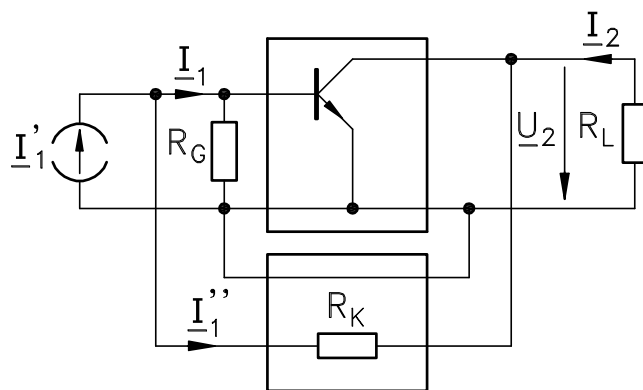


Abb. 10: Transimpedanzverstärker als Netzwerk mit Parallel-Parallel-Rückkopplung.

### 3 Stabilität von rückgekoppelten Netzwerken

Rückgekoppelte Netzwerke bergen das Problem möglicher Instabilität. So kann z. B. aus einer erwünschten Gegenkopplung durch auftretende Phasendrehungen eine unerwünschte Mitkopplung werden.

Wie bei jedem Netzwerk muss auch ein rückgekoppeltes Netzwerk die Bedingung erfüllen, dass die Übertragungsfunktion  $\underline{V}'(\underline{s})$  ( $\underline{s}$  – komplexe Frequenz  $\underline{s} = j\omega + \sigma$  der Laplace-Transformation) keine Polstellen in der rechten komplexen  $\underline{s}$ -Halbebene ( $\Re(\underline{s}) \geq 0$ ) aufweisen darf.

#### 3.1 Stabilitätskriterium nach Strecker-Nyquist

Wir nehmen zunächst an, der Verstärker ohne Rückkopplung sei stabil, d. h.  $\underline{V}(\underline{s})$  habe keine Pole in der rechten  $\underline{s}$ -Halbebene. Damit dann  $\underline{V}'(\underline{s})$  gemäß Gl. (13) auch stabil ist, darf auch  $\underline{V}'(\underline{s})$  keine Pole in der rechten  $\underline{s}$ -Halbebene aufweisen, d. h.

$$\text{für alle } \Re(\underline{s}) \geq 0 \text{ muss } \underline{K} \cdot \underline{V} \neq 1$$

sein. Dazu ist es zweckmäßig, die *konforme Abbildung* von der komplexen  $\underline{s}$ -Ebene in die komplexe  $\underline{K} \cdot \underline{V}$ -Ebene zu betrachten, wie sie Abb. 11 zeigt.

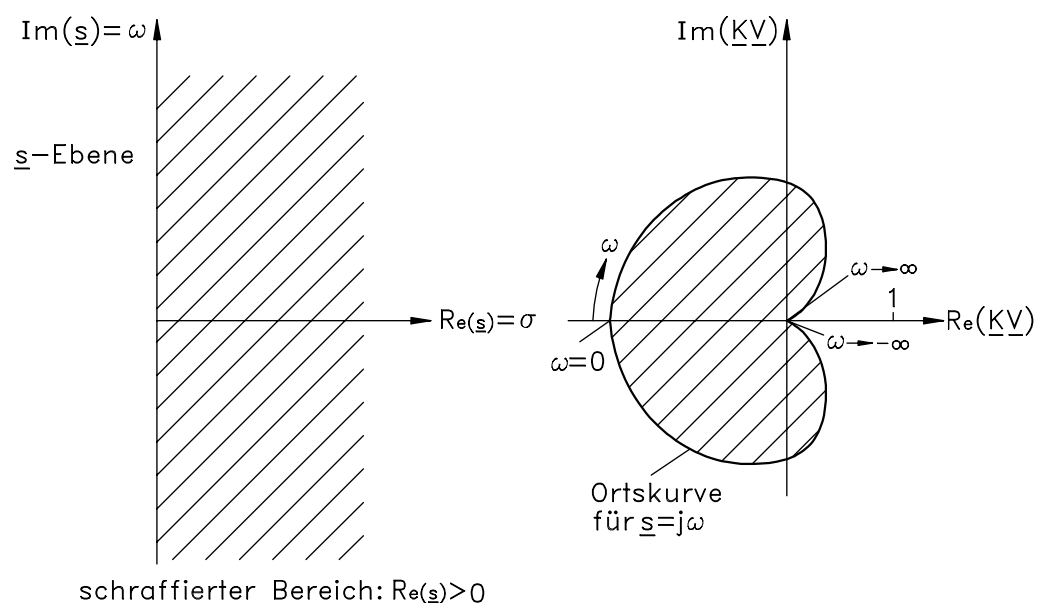


Abb. 11: Konforme Abbildung der komplexen  $\underline{s}$ -Ebene in die  $\underline{K} \cdot \underline{V}$ -Ebene.

Der Bereich  $\Re(\underline{s}) > 0$  wird begrenzt durch die imaginäre Achse  $\underline{s} = j\omega$ . Die Abbildung dieser Geraden  $\underline{s} = j\omega$  in die  $\underline{K} \cdot \underline{V}$ -Ebene (auch als „Ortskurve“ bezeichnet) ist in Abb. 11 skizziert. Die konforme Abbildung ist im kleinen winkeltreu, so dass die rechte  $\underline{s}$ -Halbebene in den schraffierten Bereich der  $\underline{K} \cdot \underline{V}$ -Ebene abgebildet wird. Nun muss für stabiles Verhalten für alle  $\Re(\underline{s}) \geq 0$  ein  $\underline{K} \cdot \underline{V} \neq 1$  gelten, so dass der schraffierte Bereich in der  $\underline{K} \cdot \underline{V}$ -Ebene den Punkt „+1“ nicht beinhalten darf.

Damit lässt sich das Strecker-Nyquist-Kriterium wie folgt formulieren:

Für stabiles Verhalten darf die Ortskurve  $(\underline{K} \cdot \underline{V})(j\omega)$  den Punkt „+1“ nicht umschließen.

Der rückgekoppelte Verstärker in Abb. 11 wäre also stabil.

**Beispiel:** Gegenkopplung über mehrere Verstärkerstufen.

Wir nehmen an, der Verstärker mit der Übertragungsfunktion  $\underline{V}$  besteht aus  $n$  hintereinander geschalteter Stufen, die jeweils die Charakteristik eines Tiefpasses 1. Ordnung aufweisen, und die Rückkopplung  $\underline{K}$  sei reell und frequenzunabhängig mit  $\underline{K} = K$ , d. h.:

$$K \cdot \underline{V} = -K \cdot v_m \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_g}\right)^n}. \quad (17)$$

Für  $n \in \{1, 3\}$  ist die Ortskurve  $(\underline{K} \cdot \underline{V})(j\omega)$  in Abb. 12 dargestellt (für  $n = 1$  ergibt sich ein Kreis), während  $n = 2$  der Darstellung in Abb. 11 entspricht.

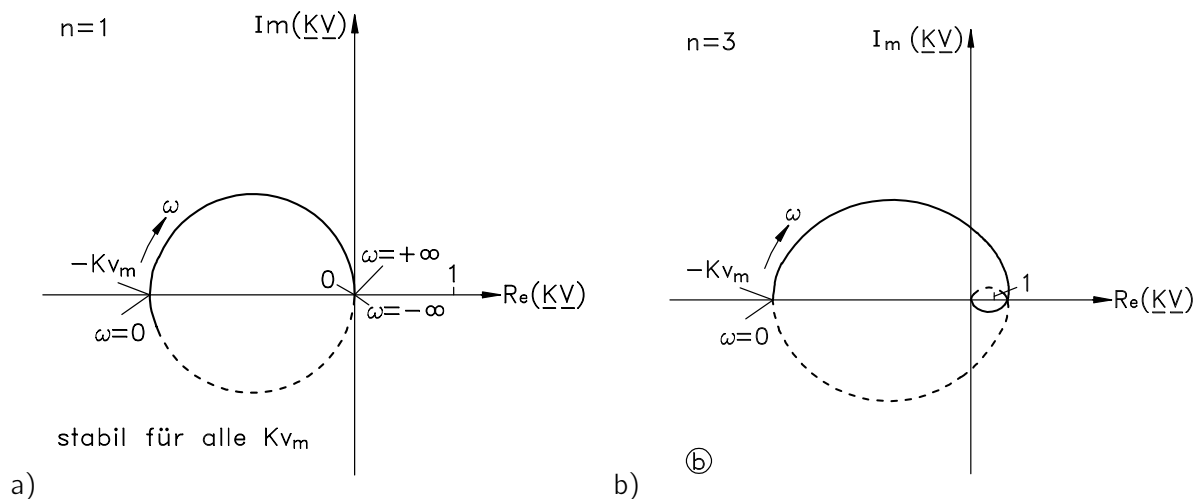


Abb. 12: Ortskurven  $(\underline{K} \cdot \underline{V})(j\omega)$  für gegengekoppelte Verstärker mit a) 1 Stufe ( $n = 1$ ) und b) 3 Stufen ( $n = 3$ ) entsprechen Gl. (17). Kurve durchgezogen für  $\omega > 0$  und gestrichelt für  $\omega < 0$ .

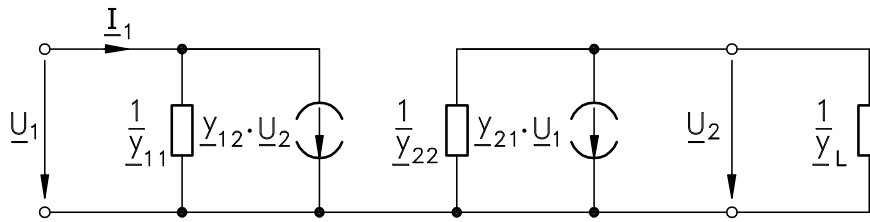
Für  $n \in \{1, 2\}$  bleibt das Verhalten immer stabil, während bei  $n = 3$  die Ortskurve den Punkt „+1“ für  $K \cdot v_m \geq 8$  umschließt und damit der Verstärker instabil wird und anfängt zu schwingen.

Das Problem bei der Rückkopplung über mehrere Stufen besteht darin, dass aus der gewünschten Gegenkopplung dann auf Grund der zusätzlichen Phasendrehung bei höheren Frequenzen eine Mitkopplung mit der entsprechenden Schwingneigung werden kann.

### 3.2 Stabilitätskreis und Stabilitätsfaktor

Allein durch die innere Rückkopplung, ausgedrückt durch den  $y$ -Parameter  $y_{12}$ , kann ein Verstärker instabil werden. Zur Untersuchung dieser Instabilität wird ein Verstärker, beschrieben durch seine  $y$ -Parameter, betrachtet, der mit der Lastadmittanz  $y_L$  abgeschlossen ist (siehe Abb. 13).



Abb. 13: Verstärker mit  $\underline{y}$ -Parameterterm und Lastadmittanz  $\underline{y}_L$ .

Es soll nun die Eingangsadmittanz  $\underline{y}_E = \frac{I_1}{U_1}$  des Verstärkers ermittelt werden. Ein Verstärker kann dabei instabil werden, wenn  $\Re(\underline{y}_E) < 0$  wird.

Für den Eingangskreis gilt:

$$I_1 = \underline{y}_{11} U_1 + \underline{y}_{12} U_2 \quad (18)$$

und für den Ausgangskreis ergibt sich

$$0 = (\underline{y}_{22} + \underline{y}_L) U_2 + \underline{y}_{21} U_1 \quad (19)$$

und damit

$$U_2 = -\frac{\underline{y}_{21}}{\underline{y}_{22} + \underline{y}_L} U_1. \quad (20)$$

Wir können so  $U_2$  in Gl. (18) eliminieren, und aus Gl. (18) ergibt sich:

$$I_1 = \left( \underline{y}_{11} - \frac{\underline{y}_{21} \underline{y}_{12}}{\underline{y}_{22} + \underline{y}_L} \right) U_1 \quad (21)$$

und damit die zu untersuchende Eingangsadmittanz  $\underline{y}_E$

$$\underline{y}_E = \frac{I_1}{U_1} = \underline{y}_{11} - \frac{\underline{y}_{21} \underline{y}_{12}}{\underline{y}_{22} + \underline{y}_L} \quad (22)$$

Für  $\Re(\underline{y}_E) < 0$  kann der Verstärker instabil werden, da dann der Verstärkereingang nicht mehr Energie aufnimmt, sondern Energie abgibt. Um nun zu erkennen, für welche Lastadmittanzen  $\underline{y}_L$  diese Instabilität auftreten kann, wird Gl. (22) nach  $\underline{y}_L$  aufgelöst:

$$\underline{y}_L = -\underline{y}_{22} - \frac{\underline{y}_{12} \underline{y}_{21}}{\underline{y}_E - \underline{y}_{11}}. \quad (23)$$

Diese Beziehung lässt sich auffassen als eine konforme Abbildung von der komplexen Ebene der Eingangsadmittanz  $\underline{y}_E$  in die komplexe Ebene der Lastadmittanz  $\underline{y}_L$ . Insbesondere ist von Interesse, wohin die linke Halbebene von  $\underline{y}_E$  (mit  $\Re(\underline{y}_E) < 0$  – also instabil) abgebildet wird (siehe Abb. 14). Die linke Halbebene der  $\underline{y}_E$ -Ebene wird damit in einen Kreis in der  $\underline{y}_L$ -Ebene abgebildet. Dieser Kreis wird als sog. „Stabilitätskreis“ bezeichnet. Lastadmittanzen außerhalb dieses Stabilitätskreises führen damit zu einem stabilen Verstärkerverhalten, während Lastadmittanzen innerhalb dieses Kreises zu  $\Re(\underline{y}_E) < 0$  und damit zu instabilem Verhalten führen können.

Passive Lastadmittanzen haben stets  $\Re(\underline{y}_L) > 0$ . Ein Verstärker wird als *absolut stabil* bezeichnet, wenn für derartige passive Lastadmittanzen immer auch  $\Re(\underline{y}_E) > 0$  gilt. Dies bedeutet, dass ein

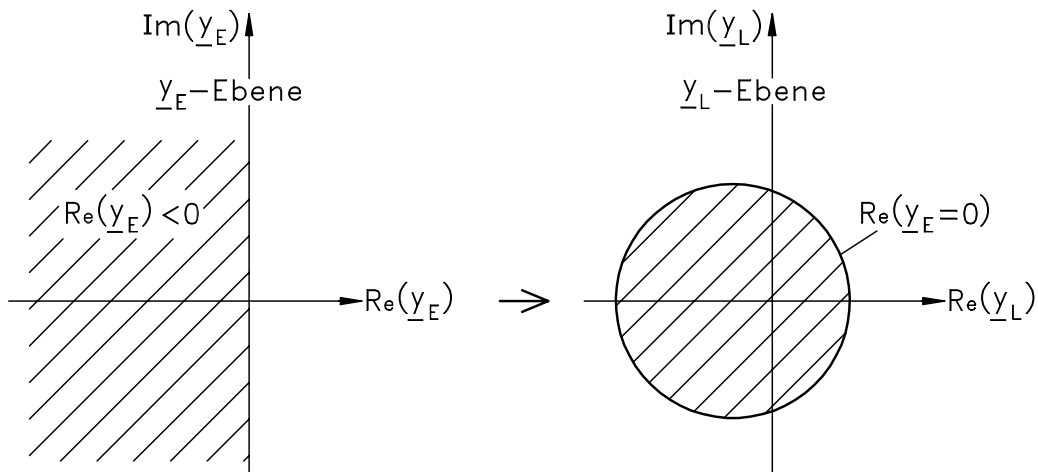


Abb. 14: Konforme Abbildung der linken  $\underline{y}_E$ -Halbebene in einen Kreis (Stabilitätskreis) in der  $\underline{y}_L$ -Ebene.

Verstärker immer genau dann absolut stabil ist, wenn der Stabilitätskreis in der linken Halbebene der  $\underline{y}_L$ -Ebene liegt. Um eine Bedingung für die absolute Stabilität eines Verstärkers herzustellen, nehmen wir zunächst an, dass es doch irgendeine Lastadmittanz  $\underline{y}_L$  mit  $\Re(\underline{y}_L) > 0$  gäbe, für die  $\Re(\underline{y}_E) = 0$  wird:

$$\Re(\underline{y}_E) \stackrel{!}{=} 0 = \Re(\underline{y}_{11}) - \Re\left(\frac{\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}}{\underline{y}_{22} + \underline{y}_L}\right). \quad (24)$$

Um die beiden  $\Re()$ -Ausdrücke besser auswerten zu können, schreiben wir  $\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}$  und  $(\underline{y}_{22} + \underline{y}_L)$  nach Betrag und Phase

$$\begin{aligned} \underline{y}_{12}\underline{y}_{21} &= |\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}| \exp(j\varphi) \\ \underline{y}_{22} + \underline{y}_L &= |\underline{y}_{22} + \underline{y}_L| \exp(j\varphi_2) = \frac{\Re(\underline{y}_{22} + \underline{y}_L)}{\cos(\varphi_2)} \exp(j\varphi_2). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich in Gl. (24):

$$0 = \Re(\underline{y}_{11}) - |\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}| \frac{\cos(\varphi_2)}{\Re(\underline{y}_{22} + \underline{y}_L)} \cos(\varphi - \varphi_2)$$

und damit

$$\begin{aligned} \Re(\underline{y}_{11})\Re(\underline{y}_{22} + \underline{y}_L) &= |\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}| \cos(\varphi_2) \cos(\varphi - \varphi_2) \\ &= \frac{1}{2} |\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}| [\cos(\varphi) + \cos(2\varphi_2 - \varphi)]. \end{aligned}$$

Diese Beziehung lässt sich auch schreiben als

$$\Re(\underline{y}_{11})\Re(\underline{y}_{22} + \underline{y}_L) = \frac{1}{2} \Re(\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}) + \frac{1}{2} |\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}| \cos(2\varphi_2 - \varphi).$$

Diese Gleichung ist offenbar bei  $\Re(\underline{y}_L) > 0$  und beliebiger Phase  $\varphi_2$  nur erfüllbar, wenn die folgende Ungleichung gilt (wir setzen dabei ein  $\Re(\underline{y}_{11}) > 0$  voraus):

$$\Re(\underline{y}_{11})\Re(\underline{y}_{22}) < \frac{1}{2} [\Re(\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}) + |\underline{y}_{12}\underline{y}_{21}|].$$

Ist diese Gleichung nicht erfüllt, wenn also

$$\Re(y_{11})\Re(y_{22}) > \frac{1}{2}[\Re(y_{12}y_{21}) + |y_{12}y_{21}|] \quad (25)$$

gilt, ist für beliebige Lastadmittanzen mit  $\Re(y_L) > 0$  eine Eingangsadmittanz  $\Re(y_E) = 0$  nicht möglich, so dass Gl. (25) die Bedingung dafür angibt, dass der Stabilitätskreis in der linken  $y_L$ -Halbebene liegt. Damit ist unter der Voraussetzung von Gl. (25) der Verstärker *absolut stabil*.

Zur Charakterisierung der Stabilität wird häufig ein *Stabilitätsfaktor*  $k$  eingeführt gemäß:

$$k = \frac{2\Re(y_{11})\Re(y_{22}) - \Re(y_{12}y_{21})}{|y_{12}y_{21}|}. \quad (26)$$

Die Bedingung für absolute Stabilität nach Gl. (25) entspricht dabei  $k > 1$ . Für  $k < 1$  ist der Verstärker nur bedingt stabil. Der Stabilitätsfaktor  $k$  kann auch mit Streuparametern formuliert werden:

$$k = \frac{1 + |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2|S_{12}S_{21}|}.$$

Abschließend soll noch ohne Beweis die maximale Verstärkung  $G'_m$  bei eingangs- und ausgangsseitiger Anpassung angegeben werden:

$$G'_m = \left| \frac{y_{21}}{y_{12}} \right| \left( k - \sqrt{k^2 - 1} \right) = \left| \frac{y_{21}}{y_{12}} \right| \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - 1}}, \quad k > 1. \quad (27)$$

Für  $k < 1$  darf der Verstärker natürlich nicht eingangs- und ausgangsseitig angepasst werden, da er sonst anfängt zu schwingen.

## 4 Oszillatoren

Ein rückgekoppeltes Netzwerk wird zum *Oszillator*, wenn  $\underline{K} \cdot \underline{V} = 1$  wird. In diesem Sinn gibt es eine große Vielfalt bei der Realisierung von Oszillatoren.

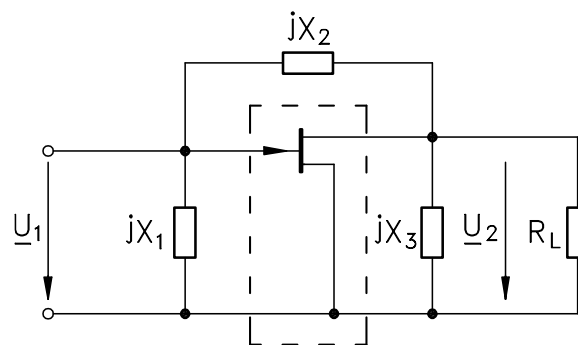


Abb. 15: Hochfrequenzschaltbild eines Oszillators mit den Reaktanzen  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$ .

Als Beispiel wollen wir einen LC-Oszillator entsprechend Abb. 15 betrachten.  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  stellen dabei Reaktanzen, also z. B. Induktivitäten oder Kapazitäten, dar. Wenn der FET in Abb. 15 nur durch

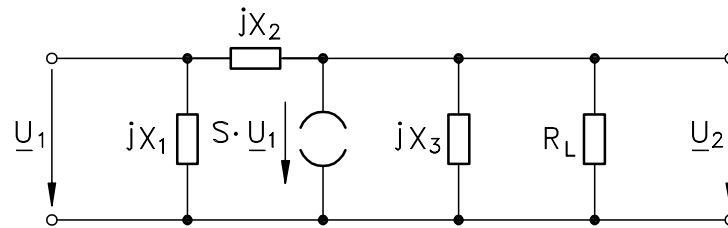


Abb. 16: Ersatzschaltbild des Oszillators von Abb. 15.

seine Steilheit  $S$  charakterisiert wird (keine Rückwirkung, Eingangs- und Ausgangsimpedanzen  $\rightarrow \infty$ ), ergibt sich das Ersatzschaltbild in Abb. 16.

Die Anschwingbedingung für den Oszillator in Abb. 16 ergibt sich wahlweise aus  $\underline{K} \cdot \underline{Y} \stackrel{!}{=} 1$  oder der Bedingung  $\det(\underline{y}) = \underline{y}_{11}\underline{y}_{22} - \underline{y}_{12}\underline{y}_{21} = 0$  (wenn man die  $\underline{y}$ -Parameter der Anordnung in Abb. 16 bestimmt) oder aus folgender anschaulicher Überlegung:

In Abb. 16 gilt für die Verstärkung

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{S}{\underline{Y}}, \quad (28)$$

wobei  $\underline{Y}$  der Parallelschaltung von  $jX_3$  mit  $R_L$  und der Serienschaltung von  $jX_1$  und  $jX_2$  entspricht:

$$\underline{Y} = \frac{1}{jX_3} + \frac{1}{R_L} + \frac{1}{jX_1 + jX_2}. \quad (29)$$

Andererseits gilt für die Rückwirkung vom Ausgang zum Eingang der Spannungsteiler

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{X_1}{X_1 + X_2}. \quad (30)$$

Die Multiplikation von Gl. (28) und (30) führt dann auf die *Anschwingbedingung*:

$$\frac{U_1 U_2}{U_2 U_1} \stackrel{!}{=} 1 = -\frac{S}{\underline{Y}} \frac{X_1}{X_1 + X_2}. \quad (31)$$

Um Gl. (31) zu erfüllen, muss zunächst  $\underline{Y}$  reell sein, so dass gelten muss:

$$\frac{1}{jX_3} + \frac{1}{jX_1 + jX_2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (32)$$

und damit

$$X_1 + X_2 + X_3 \stackrel{!}{=} 0. \quad (33)$$

Gl. (33) stellt die *Phasenbedingung* für das Anschwingen des Oszillators dar. Mit Gültigkeit von Gl. (33) wird  $\underline{Y} = \frac{1}{R_L}$  und  $X_1 + X_2 = -X_3$ , so dass sich aus Gl. (31) ergibt:

$$S \cdot R_L \cdot \frac{X_1}{X_3} \stackrel{!}{=} 1 \quad (34)$$

Die Steilheit  $S$  in Gl. (34) gibt die Steilheit an, die mindestens erforderlich ist, damit der Oszillator anschwingt (Anschwingsteilheit). Weiterhin zeigt Gl. (34), dass  $X_1$  und  $X_3$  das gleiche Vorzeichen und damit den gleichen Reaktanztyp (z. B. beide Reaktanzen induktiv oder beide Reaktanzen kapazitiv) aufweisen müssen.

Es ergeben sich dann grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

**induktive Dreipunktschaltung**

Hier sind  $X_1$  und  $X_3$  induktiv mit  $X_1 = \omega L_1$  und  $X_3 = \omega L_3$  und  $jX_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$ , woraus sich die Schwingfrequenz  $\omega_0$  zu

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{L_1 + L_3} \right)$$

und die Anschlagsteilheit aus Gl. (34) zu

$$S = \frac{1}{R_L} \frac{L_3}{L_1}$$

ergeben.

**kapazitive Dreipunktschaltung**

Hier sind  $X_1$  und  $X_3$  kapazitiv mit  $jX_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$  und  $jX_3 = \frac{1}{j\omega C_3}$  und  $X_2$  induktiv mit  $X_2 = \omega L_2$ . Es ergeben sich dann  $\omega_0$  aus Gl. (33) zu

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_2} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right)$$

und die Anschlagsteilheit aus Gl. (34) zu

$$S = \frac{1}{R_L} \frac{C_1}{C_3}$$

Die kapazitive Dreipunktschaltung wird auch als *Colpitts-Oszillator* bezeichnet. Der Vorteil gegenüber der induktiven Dreipunktschaltung besteht darin, dass nur eine Induktivität benötigt wird, wobei diese Induktivität z. B. auch durch einen Schwingquarz (der sich dann im induktiven Arbeitspunkt befindet) realisiert werden kann.

Ein Realisierungsbeispiel für einen Colpitts-Oszillator mit bipolarem Transistor zeigt Abb. 17.

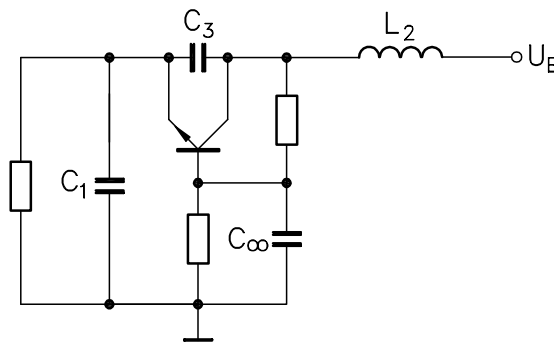


Abb. 17: Schaltungsbeispiel für einen Colpitts-Oszillator.